The Problem of the *Elastica* Treated by Jacob Bernoulli and the Further Development of this Study by Leonhard Euler

Patricia Radelet-de Grave
Université catholique de Louvain, Belgique

ABSTRACT: The article first recalls how Jacob Bernoulli began his study of elasticity with four problems, the solutions of which are made possible by the use of Leibniz's new differential and integral Calculus. These problems are the *catenaria*, the *velaria*, the *lintearia* and the *elastica* which gave its name to elasticity. He immediately tries to re-formulate all four problems within a single general theory. He tries to do so not only by starting with the principles of mechanics but also by starting with a variational principle or as he calls it with "isoperimetrical problems". The article then proceeds to show how Euler will, during more than forty years, try and finally succeed in reaching Jacob's goal of generalization.

THE PROBLEMS

In May 1690, at the end of an article published in the Acta Eruditorum, and concerning a completely different subject, Jacob Bernoulli asks the following question to the scientific community.

> To find the curve adopted by a loose thread hanging freely between two points. One assumes that the thread is a line easily flexible in every point. (Bernoulli, Jacob, May 1690, p. 219)

The thread must be perfectly flexible and uniformly loaded. The tensions are tangential to the curve. The problem was solved by his brother Johann, using Leibniz' new Calculus in an article [Bernoulli, Johann, June 1691] published in June 1691.
The problem was generalized first to non-uniformly loaded chains, then to the extensible or elastic chains by the Bernoulli brothers. In June 1691, Jacob adds an *additamentum* to an article on the logarithmical spiral where he asks the problem of the *velaria*, the form adopted by a sail pushed by the wind [Bernoulli, Jacob, June 1691]. The thread must also be perfectly flexible and weightless. The pressure of the wind can act parallel to some direction or orthogonally to the curve. It was also extended to the *lintearia*, the curve adopted by a cloth under the pressure of water. In this case the pressure is surely orthogonal to the curve.
In the same *additamentum*, he explains that working on the catenary, he was led towards more general problems concerning the flexion and the curvature of a beam.

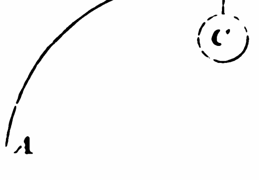

Figure 1: The *elastica* in Jacob's Op. XLII

> Occasione Problematis funicularii mox in aliud non minus illustre delapsi sumus, conernens flexiones, seu curvaturas trabium, arcuum tensorum, aut elaterum quorumvis, a propria gravitate, vel appenso pondere, aut alia quacunque vi comprimente factas ; quorlium etiam Celeberrimum LEIBNITIUM in privatis, quibus sub idem me tempus honoravit, litteris digitum opportune intendere video. Videtur autem hoc Problema, cum ob hypotheseos incertitudinem, tum casuum mutiplicem varietatem, plus aliquanto difficultatis involvere priori; quanquam hic non prolixo calculo, sed industria tantum opus est. Ego per solutionem casus simplicissimi (saltem in præmemorata hypothesi extensionis) adyta Problematis feliciter reseravi. (Bernoulli, Jacob, June 1691, p. 451-452)

But he admits that he only solved the simplest case, the one using Hooke's law or linear law of extension of the material of the beam. The study of those problems is made possible by the new differential and integral Calculus but their solutions involve difficult analytical (integration), geometrical (radius of curvature) and mechanical problems. It is only 79 years later that Leonhard Euler will give a first complete and well structured theory of those problems, 30 years before he had tried to give them a different theory using completely different principles.

TWO POSSIBLE GENERALIZATIONS

The fact that Jacob Bernoulli, links those problems right at the beginning, grouping them in his *additamentum* to Op. XLII and principally in the quotation we just reproduced, shows that they are for him, maybe only intuitively, part of a more general problem. This fact is confirmed by various items of his *Meditatione* [Bernoulli, Jacob, Meds. CLXXXIX and CCXXXIX], his scientific journal.
In his *Meditationes,* he tries first to explain them using isoperimetrical problems. It means using a variational principle. The isoperimetrical problems are of the following type : among a collection of isoperimetrical curves, i.e. having the same length, find the one that satisfies a particular extremum condition. For example, among the isoperimetrical curves, the one which encloses the largest surface is the circle. This kind of reasoning had already been used by Huygens for the catenary that is to find out of all curves having the same length, the one having its centre of gravity in the lowest position.
At the end of the *Meditationes,* Jacob tries secondly to generalize the catenary, applying to the thread, forces having various intensities and acting in various directions [Bernoulli, Jacob, Med. CCXLV]. He does it using this time the general principles of mechanics, namely using the law of the lever. In his publications on the *velaria* [Bernoulli, Jacob, June 1692] and on the *elastica* [Bernoulli, Jacob, June 1694], Jacob uses that same principle to find the curves.
Two young men, Daniel Bernoulli [Bernoulli, Daniel, 1728], Jacob's nephew and Leonhard Euler [Euler, 1728] will follow the same way in the *Commentarii* of St. Petersbourg, in 1728. Daniel shows how to use the parallelogram law of forces to solve the general problem of the catenary and Euler, having read his friend's paper, gives the plan of a well structured treatise on elasticity. But it is only a plan and not all problems are solved yet. It will take almost forty years for Euler to fulfil this plan. He'll have to understand that the parallelogram law is not sufficient to solve the general problem and that a generalization of the law of the lever namely the law of moment of momentum, is necessary. This will be done in 1770 in his work *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum* [Euler, 1770].

THE SEARCH FOR A GENERALIZATION USING A VARIATIONAL PRINCIPLE

We will now concentrate on Euler's development of elasticity using variational principles and we will see how Euler uses the results obtained with the principle of mechanics. We will also see that he tried various variational principles.
First, Euler follows closely the way Jacob initiated using isoperimetrical problems but encounters integration problems.

> §. 4. Has igitur classes in sequentibus quaestionibus complectar maxime uniuersalibus. I Ex omnibus prorsus curvis eam determinare, quae proprietam A maximo vel minimo gradu contineat. II. Ex omnibus curvis proprietate A aequaliter praeditis, eam determinare, quae proprietatem B maximo vel minimo gradu contineat. III. Ex omnibus curvis et proprietate A et proprietate B aequaliter praeditis, eam determinare, quae proprietatem C maximo minimove gradu contineat. IV. Ex omnibus curuis proprietatibus, A et B et C singulis aequaliter praeditis, eam determinare, quae proprietatem D maximo minimove gradu contineat. Simili modo quinta classis curvas quatuor proprietatibus praeditas contemplabitur et ita porro sequentes. (Euler, 1738, E. 27, p. 125)

On May the fifth 1739, he writes to his friend Daniel Bernoulli to explain him the mechanical problem he is unable to solve and to ask for his help :

> Je ne doute pas du fait que la courbe élastique ne satisfasse à une propriété de maximum ou de minimum. En effet une telle courbe formée par la nature aura une telle propriété, tout comme la caténaria, la lintearia; mais l'expression qui doit être rendue maximale dans l'élastica m'a d'abord paru obscure; néanmoins je perçois bien que ce doit être la quantité de force potentielle qui se glisse dans la courbure

mais je serai curieux d'apprendre dans la pièce que vous m'avez promise comment on peut exprimer cette quantité. (Euler, 5/5/1739)

At that time he was working on one of his most famous works, the Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti [Euler, 1744], where he develops the mathematics that are necessary to solve variational problems and would like to apply that theory to the solution of the elastica. He is convinced, just like Jacob, that it is possible to derive the equation of the elastica from a variational principle but he does not know what quantity to extremize. Daniel Bernoulli will answer only three years later. During that time, Pierre Louis Moreau de Maupertuis published two articles [Maupertuis, 1740 and 1744] in the Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, Loi du repos des corps in 1740 and Accord de différentes loix de la Nature, qui avoient jusqu'ici paru incompatibles in 1744. In those articles, he introduces a new variational principle, the principle of least action and claims that one can deduce the entire mechanics from it. This of course gives much more value to the Methodus inveniendi Euler is finishing. Right at that moment on October the 20th, 1742, between the two publications of Maupertuis, Daniel Bernoulli finally answers Euler's questions

Je me souviens cependant que vous comme moi avons mis en doute la généralité de l'équation ordinaire de l'élastique Pourriez vous réfléchir à la chose suivante: ne pourrait on déduire la courbure ABC des principes de la mécanique sans faire appel au levier. J'exprimerais la force vive de la lame naturellement rectiligne et incurvée par

$$\int \frac{ds}{R^2} \tag{1}$$

en assumant que l'élément ds est constant et indiquant par R le rayon osculateur. Comme personne n'a mené la méthode des isopérimètres aussi loin que vous, vous résolvrez ce problème qui exige que

$$\int \frac{ds}{R^2} \text{ soit un minimum (Fuss, 1843).} \tag{2}$$

Euler is now able to add two *additamenta* to his *Methodus inveniendi*. The first one concerns *De curvis elasticis* and the second *De motu projectorum in medio non resistente*. In the first *additamentum* [Truesdell, 1960], Euler finds a general expression for the *elastica* and finds the numerous forms a thin elastic band can take.

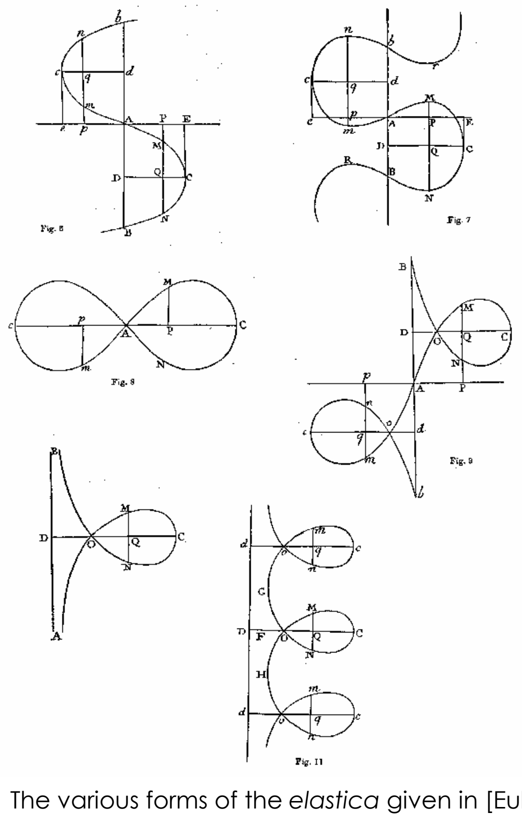

Figure 2: The various forms of the *elastica* given in [Euler, 1744]

But this is not the most general problem and Euler will go ahead looking for a generalization using variational principles, namely the principle of least action.

PRINCIPLE OF LEAST ACTION AND PRINCIPLE OF VIRTUAL WORKS OR VELOCITIES

Euler's problem remains: what is the right expression of the action one has to use? This is the question he tries to answer in his next article on the subject. *Recherches sur les plus grands et plus petits qui se trouvent dans les actions des forces.* As usual, in the introduction to his article, Euler puts the problem in its historical context, summarizes the results already obtained and gives the general ideas of his article. Let us follow the beginning of his text *Recherches sur les plus grands et plus petits qui se trouvent dans les actions des forces,* par M. EULER :

> I. C'est une vérité dont on ne peut plus douter, que toutes les actions, qui sont produites par les forces de la nature, renferment constamment un maximum, ou un minimum. C'est à dire, les forces étant données, l'effet qu'elles produisent, sera toujours tel, qu'une certaine quantité y devient un maximum, ou un minimum, de sorte que cette prérogative n'auroit plus lieu, si l'effet avoit été tout autre. Cette considération nous conduit à reconnoitre un principe général de la nature, sur lequel toutes ses actions se règlent; & qui nous fait voir, que la nature se propose toujours un certain but, auquel elle tache de parvenir, en y employant les moindres dépenses. On sera tout à fait convaincu de la vérité de ce principe général, par les excellentes réfléxions, que Monsieur de Maupertuis, notre illustre Président, a publiées sur ce sujet, tant dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris, que dans nos Mémoires pour l'Année 1746, où il a démontré que dans le choc des Corps le mouvement se distribuë de maniere que la quantité d'action, que suppose un changement arrivé, est sa plus petite qu'il soit possible. De plus il a fait voir, que dans le repos les Corps, qui se tiennent en équilibre, doivent être tellement situés, que s'il leur arrivoit quelque petit mouvement, la quantité d'action seroit la moindre. (Euler, 1748, E. 145, pp. 149-150)

Euler gives a general presentation of the variational way of solving problems, underlines Maueprtuis' role and in the last sentence links this way of solving problems to the principle of virtual works without mentioning it [Cerulus, in press].

> II. C'est donc ce principe de la moindre quantité d'action, auquel Mr. de Maupertuis réduit tous les maxima, ou minima, que la Nature observe dans toutes ses productions: & la quantité d'action pourra toujours être représentée par une certaine formule algebrique, qui étant appliquée à l'effet produit réellement par la Nature, y obtient une valeur plus petite, qu'elle obtiendroit, s'il étoit arrivé tout autre effet. Ce principe aura donc également lieu dans la Mecanique & dans la Statique, c.à.d. dans le mouvement, aussi bien que dans tous les états d'équilibre, où les corps se peuvent trouver. Pour le mouvement, Mr. de Maupertuis vient de faire voir que ce principe de la moindre quantité d'action s'observe à la rigueur dans le choc des corps, tant élastiques que non élastiques: & moi, j'ai découvert une semblable loi dans le mouvement des corps, qui sont attirés vers un, ou plusieurs centres de forces, par des forces quelconques; ayant remarqué que le mouvement du corps, & la courbe qu'il décrit, renferme toujours cette propriété, que nommant υ sa vitesse dans un endroit quelconque, & ds l'élément de l'espace, cette formule ∫υds sera toujours un minimum. Ce sera donc dans ce cas cette formule ∫υds, qui exprime ce que Mr. de Maupertuis nomme la quantité d'action. Ces deux cas du mouvement, dans lesquels nous voyons, que ce principe a lieu, sont d'une si grande etenduë, qu'on y peut presque réduire tous les mouvemens, qui arrivent au monde; & partant on n'aura plus la moindre raison de douter, que dans tous les mouvemens, par quelques forces qu'ils soient produits, il n'y ait toujours une certaine formule, dont la valeur soit la plus petite, & par laquelle sera representée la quantité d'action. (Euler, 1748, E. 145, p. 150)

In the second paragraph Euler reminds that Maupertuis has shown the validity of the principle of least action for the collisions and that he, Euler, has shown its validity for motions acted upon by one or more centre of force in which the force acts with a law in

$\frac{1}{r^n}$. There the action is $\int \upsilon ds$ and it must be a minimum, υ being the velocity. (3)

> III. L'usage de ce principe est déjà depuis long tems reconnu dans la Statique, ou Dynamique, où il s'agit de l'équilibre des corps sollicités par des forces quelconques, & c'est par son moyen, qu'on a donné des solutions de plusieurs problemes de cette nature. Il a été aisé de prévoir, qu'une chaine suspenduë de ses deux bouts devoit prendre une telle figure, afin que son centre de gravité soit le plus bas: ou que la distance de ce centre au centre de la terre, ou bien un plan horizontal, soit un minimum. Si l'on nomme un élément quelconque de la chaine = ds, & sa distance à un plan horizontal fixe pris à volonté = x, ce sera la valeur de cette formule ∫xds, qui sera un minimum pour la courbe de la chaine: & partant ce sera la même formule ∫xds, qui représente la quantité d'action, qui doit être la plus petite. De même un linge rempli d'un fluide prendra la figure, dont la capacité est la plus grande, afin que le fluide puisse descendre le plus bas qu'il est possible: & Mr. de Maupertuis a fait voir l'usage de ce grand principe en plusieurs autres figures, que ces corps sollicités par des forces quelconques sont obliges de recevoir; où il a determiné la formule, qui répresente en chaque cas la quantité d'action, qui y doit être un minimum. Mr. Daniel Bernoulli a aussi remarqué, que la courbe d'une lame elastique renferme un tel minimum; car nommant un élément quelconque de cette courbe = ds, & le rayon de sa développée dans cet endroit = r, il a observé que la valeur de cette formule ∫ds/rr devient un minimum dans la courbe élastique; & c'est de ce principe que j'ai déterminé la nature de cette courbe, dans mon traité sur la methode de Maximis & Minimis, pour faire voir,

que ce principe fournit la même courbe, qu'on a trouvée par la methode directe, dont on se sert ordinairement. (Euler, 1748, E. 145, pp. 150-151)

Euler records that this principle had already been used to find the catenary, the curve that has its center of gravity in the lowest possible place.

$$\int xds \text{ has to be a minimum.} \tag{4}$$

This principle also gives the solution of the *lintearia* where the capacity has to be the greatest possible.
Finally the principle can be used to find the form of the *elastica*, since Daniel Bernoulli has found the quantity to minimise, namely

$$\int \frac{ds}{R^2}. \tag{5}$$

IV. Par là on voit qu'il doit y avoir une double methode de resoudre les problemes de Mecanique; l'une est la methode directe, qui est fondée sur les loix de l'équilibre, ou du mouvement; mais l'autre est celle dont je viens de parler, où sachant la formule, qui doit être un maximum, ou un minimum, la solution se fait par le moyen de la methode de Maximis & minimis. La premiere fournit la solution en déterminant l'effet par les causes efficientes; or l'autre a en vuë les causes finales, & en déduit l'effet: l'une & l'autre doit conduire à la même solution, & c'est cette harmonie, qui nous convainc de la verité de la solution, quoique chaque methode doive être fondée sur des principes indubitables. Mais il est souvent très difficile de découvrir la formule, qui doit être un maximum, ou minimum, & par laquelle la quantité d'action est représentée. C'est une recherche qui n'appartient pas tant à la Mathematique, qu'à la Métaphysique puisqu'il s'agit de connoitre le but, que la nature se propose dans ses opérations: & ce seroit porter cette science à son plus haut degré de perfection, si l'on étoit en état d'assigner pour chaque effet que la nature produit, cette quantité d'action, qui y est la plus petite, & qu'on pût la deduire des premiers principes de notre connoissance. Mais je crois que nous sommes encore bien éloignés de ce degré de perfection, & qu'il sera presque impossible d'y arriver, à moins que nous ne découvrions pour un grand nombre de cas differens les formules, qui y deviennent, ou des maxima, ou minima. Or sachant les solutions, que la methode directe nous fournit, il ne sera pas difficile de deviner des formules, qui étant supposées des maxima, ou minima, conduisent aux mêmes solutions. Par ce moyen nous connoitrons a posteriori ces formules qui expriment la quantité d'action, & alors il ne sera plus si difficile d'en demontrer la verité par les principes connus de la Métaphysique. (Euler, 1748, E. 145, pp. 151-152)

There are two ways to solve the problems of mechanics. The direct one, using the principles of mechanics and the other, the indirect one, using a variational principle. But it is generally very difficult to find the "action", i.e. the quantity to minimize.
Euler returns to Leibniz's vocabulary to characterise those two ways, the first being by the efficient causes and the second by the final causes. This second way supposes that one finds out the aims of Nature.
But Euler's great idea, in this article, is to find first the results by the method of efficient causes, or principle of mechanics and knowing this result to find the quantity that has to be minimized to obtain it.

V. C'est dans cette vuë, que je me propose de développer quelques problèmes de Statique, qui roulent sur la courbe, qu'un fil parfaitement flexible doit former, étant sollicité par des forces quelconques. Je chercherai prémierement la solution de ces problêmes par la methode directe, c.à.d. par les loix connuës de l'équilibre; ensuite je tacherai de découvrir les formules, qui dans ces courbes trouvées obtiennent, ou la plus grande, ou la plus petite valeur, & lesquelles par conséquent pourront être regardées comme les expressions de la quantité d'action, dont la valeur sera plus petite pour 1a courbe, qu'on aura trouvée par l'autre methode, qu'elle seroit, si le fil avoit pris tout autre courbure. J'ai choisi cette espece de problêmes, puisqu'on sait déjà, que dans le cas où le fil n'est sollicité que par la gravité, c'est la distance du centre de gravité du fil au centre de la terre, qui est un minimum. Or je rendrai ce problême plus général, en supposant que toutes les particules du fil soient sollicitées par des forces quelconques, qui soient dirigées, ou vers un point fixe, ou vers plusieurs, étant proportionnelles à des fonctions quelconques de ces distances: de plus on pourra supposer que, tant la direction que la quantité de ces forces, dépende de la courbure même, comme cela arrive dans la courbe des voiles, & d'autres semblables, où la direction des forces est toujours perpendiculaire à la courbe même: & dans ces cas j'ai remarqué qu'il est beaucoup plus difficile de deviner la formule qui y est un maximum, ou minimum; & partant cette consideration contribuëra d'autant plus à la connoissance des choses, que la nature dans ses opérations tache de ménager le plus qu'il est possible. (Euler, 1748, E. 145, pp. 152-153)

This is what Euler will do in this article. He'll solve the general problem of the catenary using the principles of mechanics or direct method and afterwards he will try to find the quantities that have to be minimized to find the same solution. In fact Euler is looking for a general expression for the action.
Euler will start to find the form of a perfectly flexible thread on which various different forces act in every point using the general principles of mechanics. The principle he uses is the balance of momentum or generalization

of the law of the lever. He then considers an elastic thread and solves the general problem using the same principle.

> X. En voicy donc la solution du problême le plus général, par laquelle on est en état de déterminer la courbe, que forme un fil, ou parfaitement fléxible, ou élastique, dont tous les points sont sollicités par des forces quelconques. Mais je remarque d'abord, que cette solution générale ne se peut déduire par la methode de maximis & minimis: car quoique cette methode soit propre à fournir des solutions générales, il faut pourtant qu'on sache, desquelles des variables soyent composées les fonctions, qui entrent dans la formule qui doit être, ou un maximum, ou un minimum. Donc, à moins qu'on ne détermine la nature des fonctions P & Q, qui expriment les forces, dont chaque élément Mm du fil est sollicité, il est impossible de découvrir une formule, qui étant supposee un maximum, ou un minimum, produise la même courbe. Je m'en vais donc appliquer cette solution générale à des cas particuliers, en déterminant les fonctions P & Q, ou par des abscisses x, ou par les appliquées y, ou par une expression, qui contienne toutes les deux d'une maniere, dontt la composition soit connuë. Pour cet effet je ferai l'application de la solution générale trouvée aux problemes suivants: & je tacherai de joindre à la solution de chacun la formule, qui étant supposée un maximum, ou un minimum, conduise à la même courbe: afin qu'on en puisse connoitre pour chaque cas l'expression, qui répresente la quantité d'action. (Euler, 1748, E. 145, pp. 156-157)

But as Euler is not able to find the general form of the action corresponding to the most general problem, he considers special cases.
In the first case, he considers a perfectly flexible line acted upon by forces acting in the direction of the ordinates and being functions of those ordinates. In this case, Euler finds the following quantity of action:

$$\int ds \int Ydy \qquad (6)$$

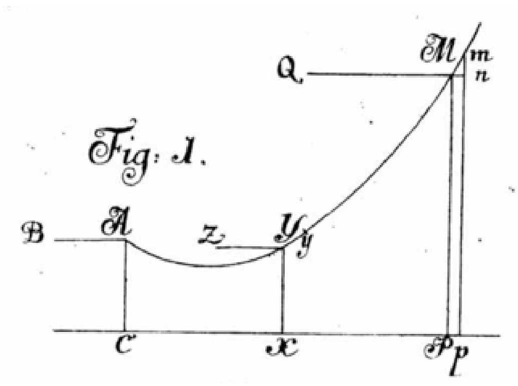

Figure 3

Theoreme I.

> XV. Le fil AYM, comme nous avons supposé dans le probleme précedent, étant dans chaque point M sollicité selon la direction des appliquees MP par des forces, qui sont exprimées par une fonction quelconque Y des appliquées PM = y, prendra une telle figure AYM, que parmi toutes les autres courbes possibles, il y aura cette expression ∫ds∫Ydy un minimum. (Euler, 1748, E. 145, p. 160)

In the second case, Euler considers a perfectly flexible line or thread acted upon by two kinds of forces, the first ones acting in the direction of the ordinates and being functions of those ordinates, the second ones acting in the directions of the abscises and being functions of those abscises. In this case, Euler finds the following quantity of action:

$$\int ds \left(\int Xdx + \int Ydy\right) \qquad (7)$$

Theoreme II.

> XVIII. Le fil AYM étant sollicité, comme on a supposé dans le probleme II. dans chaque point M par deux forces, l'une selon la direction des abscisses MQ qui soit égale à une fonction X de l'abscisse CP = x ; & l'autre selon la direction des appliquées MP, qui soit égale à une fonction Y de l'appliquée PM = y; alors ce fil prendra une telle figure AYM, dans laquelle cette expression ∫ds(∫Ydx+∫Ydy) un minimum. (Euler, 1748, E. 145, p. 163)

In the third case, Euler considers a perfectly flexible line or thread of non uniform thickness and acted upon by forces acting in the direction of the ordinates and being functions of those ordinates. In this case, Euler finds the following quantity of action:

$\int Sds \int Xdx$ where S is the function of s giving the thickness of the thread. (8)

Theoreme III.

XXII. Le fil parfaitement flexible AYM, dont la longueur = s, & la masse = ∫Sds, étant sollicité en chaque point M par deux forces acceleratrices, suivant les directions MQ, MP, dont celle-là soit égale à une fonction X de l'abscisse CP = x, à laquelle la direction MQ est parallele; or celle-ci, qui agit dans la direction de l'appliquée MP = y, soit égale à une fonction Y de y, de sorte que l'elément du fil Mm = ds, dont la masse = Sds, soit sollicité par la force motrice. XSds selon MQ & par la force motrice YSds selon MP: la courbe, AYM, que le fil formera, aura cette propriété, que parmi toutes les autres courbes de la même longueur, il y aura cette formule ∫Sds (∫Xdx + ∫Ydy) UN MINIMUM. (Euler, 1748, E. 145, pp. 166-167)

Euler studies the problem of the thread acted upon by forces coming out of one centers of forces.

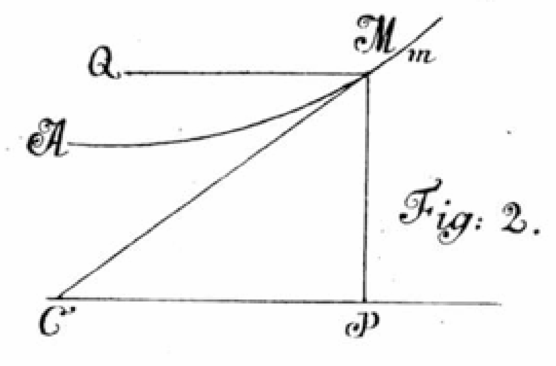

Figure 4

Theoreme IV.

XXIX. Le fil AM étant dans tous ses points M sollicité vers le point fixe C par une force acceleratrice V, qui soit une fonction quelconque de la distance CM = v, la courbure du fil se trouvera, si l'on cherche entre toutes les courbes possibles, celle où la valeur de cette expression ∫ds∫Vdv est un minimum, (ds marquant la masse de l'élément du fil Mm.). (Euler, 1748, E. 145, p. 173)

He then does it for several centers of forces.

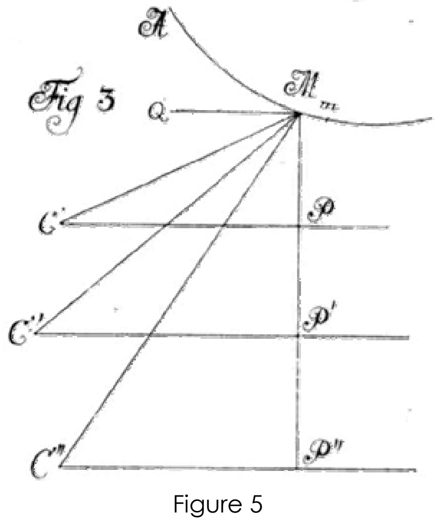

Figure 5

Theoreme V.

XXXI. Le fil parfaitement flexible AM étant dans tous ses points M sollicité vers plusieurs points fixes C, C', C'' &c. par des forces acceleratrices V, V', V'' &c. qui soient des fonctions quelconques des distances MC = v, MC' = v', MC'' = v'' &c. (c.à.d. chacune de la distance qui lui répond), la courbe, que le fil formera aura cette proprieté, que la valeur de cette formule ∫ds (∫Vdv + ∫V'dv' + ∫V''dv'') y sera un minimum, où ds marque la masse de l'elémens du fil Mm. (Euler, 1748, E. 145, p. 177)

Euler ends with the problem of an elastic thread of constant elasticity and uniform thickness acted upon by forces parallel to the ordinates and to the abscissa.

Theoreme VI.

XXXIX. Le fil elastique AYM, dont l'epaisseur aussi bien que l'elasticité soit partout la même, de sorte que la force de l'elasticité au point M, laquelle contrebalance la somme des moments de toutes les forces, qui agissent sur le fil, soit = A/r, où r marque le rayon de la courbure au point M; le fil étant sollicité dans tous ses points M suivant la direction MQ parallele aux abscisses CP = x, par des forces acceleratrices X, qui soient des fonctions quelconques de l'abscisse x, la courbe, que ce fil formera, sera trouvée si l'on cherche parmi toutes les courbes possibles celle où cette expression ∫ds (∫Xdx + A/2rr) sera un minimum, où ds marque la masse de l'élément du fil Mm. (Euler, 1748, E. 145, pp. 186)

And Euler remarks that he could have taken central forces coming out of one or more centers. One should add the actions for the various centres:

$$\int ds\left(\int Vdv+\int V'dv+\int V''dv+\int V'''dv+\&c+\frac{A}{2rr}\right) \tag{9}$$

And if the thickness is not uniform one has to write Sds instead of ds.
Euler makes an interesting final remark. The form of the action is always the same whatever the force is and if there are several forces one has to add the various actions. The only exception is the elasticity that seems completely different.

$\int ds\left(\frac{A}{2rr}\right)$ seems not to be of the same form as $\int ds\left(\int Vdv\right)$. But Euler says one could write it as

$\int ds\left(\int \frac{A}{r}d\frac{1}{r}\right)$. As V is the quantity of force pushing the element Mm in the direction MC,

$\frac{A}{r}$ is the quantity of elastic force at the point M. What about dv and $d\frac{1}{r}$? (10)

Is there also a similarity between them? dv taken negatively is the little space across which M would be transported under the action of the force V.

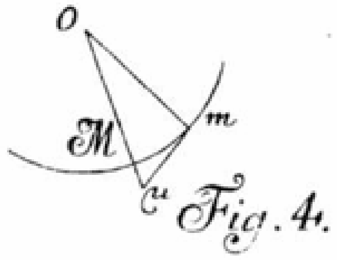

Figure 6

And $d\frac{1}{r}$ taken negatively is the path across which the elastic force would transport M. (11)

This interpretation shows also how the principle of virtual works can be linked to the principle of least action.
In his next article, *Reflexions sur quelques loix generales de la nature qui s'observent dans les effets des forces quelconques* [Euler, 1750, E. 146], Euler generalizes the results found in the previous one. He doesn't look anymore at the equilibrium of a thread but of a fluid mass. He considers Z, one particle of the fluid under the action of several forces coming out of the centres of forces C, C', C", … and finds for the quantity of action the expression:

$$\int Vdv+\int V'dv'+\int V''dv'' \tag{12}$$

where V, V', V" are the component of the forces issuing from C, C', C" taken in the direction CZ, C'Z, C"Z and dv, dv', dv" are the displacements taken in the directions of the forces. This quantity of action is the one we put in the expression of the principal of virtual works:

$$\int F\cdot ds \tag{13}$$

Euler does not know and cannot know, at that time, the general expression of the principle of least action, namely

$$S = \int_{t_a}^{t} (T(x,t) - V(x))dt \tag{14}$$

with T = kinetic energy, V = potential energy, T-V = Lagrangian, or even its simpler expression.

REFERENCES

Bernoulli, Daniel, 1728 (1732), St. 15, Methodus universalis determinandae curvaturae fili a potentiis quamcumque legem inter se observantibus extensi, una cum solutione problematum quorundam novorum eo pertinentium, *Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae*, vol. III, pp. 62-69.

Bernoulli, Daniel, 20/10/1742, letter to Euler, Mscr. UB Basel.

Bernoulli, Jacob, May 1690, Op. XXXIX, Jacobi Bernoulli analysis problematis antehac propositi, De inventione Lineae descensus a corpore gravi percurrendae uniformiter, sic ut temporibus aequalibus aequales altitudinens emetiatur: & alterius cujusdam problematis propositio, *Acta Eruditorum*, pp. 217-219 – 1744, Opera, pp. 421-426.

Bernoulli, Jacob, June 1691, Op. XLII, Specimen alterum Calculi differentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum, & Areis Triangulorum Sphaericorum: una cum Additamento quodam ad Problema Funicularium, aliisque, *Acta Eruditorum*, pp. 282-290 – 1744, *Opera*, pp. 442 - 453.

Bernoulli, Jacob, T.P. 1/1692 - T.A. 6/1692, Med. CLXXXIX, Identitas curvaturae lintei a pondere incumbentis liquoris expansi, & flexi Elateris, *Mscr UB Basel*, L1a3.

Bernoulli, Jacob, May 1692, Op XLVIII, Curvatura veli 9/3/1692, *Acta Eruditorum*, pp. 202-207 - 1744, Opera, pp. 481 - 490.

Bernoulli, Jacob, June 1694, Op. LVIII, Curvatura Laminae Elasticae. Ejus Identitas cum Curvatura Lintei a pondere inclusi fluidi expansi. Radii Circulorum Osculantium in terminis simplicissimis exhibiti, una cum novis quibusdam Theorematis huc pertinentibus, &c., *Acta Eruditorum*, pp. 262-276 - 1744, Opera, pp. 576-600.

Bernoulli, Jacob, December 1695, Op. LXVI, Explicationes, Annotationes, et Additiones ad ea, quae in Actis sup. anni de Curva Elastica, Isochrona Paracentrica, & Velaria, hinc inde memorata, & partim controversa leguntur; ubi de Linea mediarum directionum, aliisque novis, *Acta Eruditorum*, pp. 537-553 - 1744, Opera, pp. 639-663.

Bernoulli, Jacob, T.P. 2/1697 - T.A. 5/1697, Med. CCXXXIX, Inter omnes Figuras Isoperimetras vel aequalium arearum invenire illam, quae habeat maximum vel minimum aliquod. Methodus Nova, Mscr UB Basel, L1a3.

Bernoulli, Jacob , T.P. 5/1697 - T.A. 5/1698, Med. CCXLV, Filum ACDEFGB extremitatibus suis A & B suspensum ab infinitis potentiis C, D, E, F, G juxta directiones quas vis HE, HD, IE, KF, LG agentibus extenditur. Quaeritur filum curvatura, ejus directio media LP, & vis qua 2dum LP impellitur, *Mscr UB Basel - Jacob's Opera,* Genève, 1744, *Varia Posthuma* XI, pp. 1036-1048.

Bernoulli, Jacob, *Opera*, Genève:Cramer et Philibert, 1744. In the text the references are given to this edition.

Bernoulli, Johann, June 1691, Op. IV, Solutio Problematis Funicularii, *Acta Eruditorum*, pp. 274-276.

Cerulus, F. , in press, *Maupertuis ou la recherche de la loi universelle*.

Euler, L., 1728 (1732), E. 8, Solutio problematis de invenienda curva quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata, *Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae*, vol. III, pp. 70-84 - *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, series 2, vol. 10, pp. 1 - 16.

Euler, L., 1738, E. 27, Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae,* vol 6, pp. 123-155 - *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, series 1, *vol.* 25, pp. 13 - 40.

Euler, L., 1738 (1747), E. 99, Solutio problematis cuiusdam a Celeberrimo Daniele Bernoullio propositi, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol 10, pp. 164-180 - *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, series 1, vol. 25, pp. 84 - 97.

Euler, L., Letter to Daniel Bernoulli, 5/5/1739, *Mscr. UB Basel*.

Euler, L., 1744, E. 65, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. Lausanne et Genève: Bousquet, - *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, series 1, vol. 24.

Euler, L. 1748 (1750), E.145, Recherches sur les plus grands et plus petits qui se trouvent dans les actions des forces, *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, vol. 4, pp. 149-188 and Leonhardi Euleri Opera Omnia, series 2, *vol.* 5, pp. 1 - 37.

Euler, L., 1750, E 146, Reflexions sur quelques loix generales de la nature qui s'observent dans les effets des forces quelconques, *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, vol. 4, pp. 189-218 - *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, series 2, vol. 5, pp. 38 - 63.

Euler, L., 1770 (1771), E. 410, Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum, *Novi commentarii academiae scientiarum petropolitanae*, vol. 15, pp. 381-413 - *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, series 2, *vol.* 11, pp. 37-61.

Fuss, P.H., 1843, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle*, St. Petersburg, vol. II, pp. 499-507.

Maupertuis, P.L.M. de, 1740, Loi du repos des corps, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, pp. 170-176 - *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, series 2, vol. 5, 268-273.

Maupertuis, P.L.M. de, 1744, Accord de différentes loix de la Nature, qui avoient jusqu'ici paru incompatibles", *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, pp. 417-426 - *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, 1957, series 2, vol. 5, pp. 274-281.

Truesdell, C.A., 1960, The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638-1788, *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, series 2, vol. 11/2, Zürich: Orell-Füssli.