» 1°. L'action du chlore sur l'éther acétique chloruré de Malaguti continue sous l'influence de la lumière directe et produit successivement différents composés qui se représentent tous par de l'éther acétique ayant perdu de l'hydrogène et fixé une quantité proportionnelle de chlore;

» 2°. Le produit final de l'action du chlore sur l'éther acétique est l'éther acétique perchloruré, $C^8 Cl^{16} O^4$: ce produit peut être obtenu également par l'action du chlore sur l'éther chloracétique;

» 3°. L'éther acétique perchloruré sous l'influence de l'eau ou des alcalis hydratés se transforme en acide chloracétique et acide chlorhydrique;

» 4°. L'éther acétique perchloruré sous l'influence du chlore peut perdre son oxygène et se transforme alors en sesquichlorure de carbone. »

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

MÉCANIQUE. — *Mémoire sur la torsion des prismes à base rectangle et à base losange, et sur une petite correction numérique à faire subir, en général, aux moments de torsion; par* M. DE SAINT-VENANT.

(Commission précédemment nommée.)

§ I. — *Exposition.*

« **1.** Ce Mémoire a pour objet:

» 1°. De montrer à quoi tient la différence entre l'expression du moment de résistance à la torsion obtenu par M. Cauchy pour un prisme à base rectangle, et celle que fournissait la théorie ancienne : on verra qu'elle tient à ce que les sections primitivement planes deviennent gauches par la torsion, lorsque les dimensions transversales sont inégales, et de ce que l'ancienne théorie supposait qu'elles restaient planes, d'où il résultait pour la résistance une valeur plus forte que sa valeur réelle;

» 2°. De montrer qu'il faut faire subir une petite correction numérique aux expressions des moments de torsion en général, à cause du décroissement rapide, auprès du contour, des composantes de pression qui doivent s'y annuler;

» 3°. D'étendre l'analyse de M. Cauchy au cas où la section du prisme est un losange. L'expression du moment de torsion est la même, en fonction des deux *moments d'inertie* principaux de la section, que lorsque la base est rectangle : comme la même analyse ne paraît pas s'appliquer exactement et sans difficulté à des sections polygonales, curvilignes, etc. (si ce n'est à une section circulaire qui donne aussi le même résultat), je conclus que, pour la pratique, et en attendant une solution générale tout à fait exempte d'hypothèses, ce qu'il y a de mieux à faire est d'adopter, pour presque toutes les sections, les mêmes expressions du moment de torsion et du *gauchissement* que pour le rectangle et le losange, qui forment, à quelques égards, deux cas extrêmes et dont l'un, soumis à l'expérience par M. Savart, a donné, comme l'on sait, des résultats conformes à la théorie;

» 4°. De démontrer quelques autres résultats de mécanique moléculaire que j'invoque, comme ceux que je viens d'énoncer, dans mon Mémoire, inséré dans le *Compte rendu* du 30 octobre, *sur la résistance et la flexion des pièces solides*.

» Je crois que l'on me saura gré, auparavant, d'exposer aussi simplement que possible l'analyse de M. Cauchy relative au rectangle; cela dispensera le lecteur d'étudier, pour cette question, une grande partie des années 1828 et 1829 des *Exercices de Mathématiques*.

§ II. — *Rappel des formules de la mécanique moléculaire. Expression générale du moment de torsion.*

» 2. Soient, pour un point quelconque m d'un corps dont les coordonnées primitives sont x, y, z,

» ξ, η, ζ les déplacements éprouvés dans la direction des trois coordonnées;

» p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} les composantes, parallèlement aux x, aux y, aux z, de la pression intérieure supportée par l'unité superficielle d'une petite face plane perpendiculaire aux x, en vertu des forces développées par les déplacements des points du corps;

» p_{yy}, p_{yz}, p_{zz} les composantes de pressions sur des faces perpendiculaires aux y et aux z, la première sous-lettre désignant toujours la face, et la seconde le sens de la décomposition.

» (On a, comme l'on sait, $p_{yz} = p_{zy}$, $p_{xz} = p_{zx}$, $p_{xy} = p_{yx}$.)

» ρ la densité, et X, Y, Z les forces accélératrices agissant sur l'unité de la masse du corps.

» Soient, en un point de la surface extérieure du corps,

» ϖ la pression extérieure s'exerçant sur l'unité superficielle;

» $C_{\varpi x}$, $C_{\varpi y}$, $C_{\varpi z}$ les cosinus des angles de cette pression avec les x, les y, les z;

» C_{nx}, C_{ny}, C_{nz} les cosinus des angles formés par la normale à la surface extérieure au même point.

» Soient enfin a_{xx}, a_{xy}, etc., six coefficients constants exprimant l'élasticité du corps en divers sens; on suppose qu'il ait des *axes d'élasticité* parallèles aux x, y, z.

» On a, comme l'on sait,

$$(1)\quad \begin{cases} p_{xx} = 3a_{xx}\dfrac{d\xi}{dx} + a_{xy}\dfrac{d\eta}{dy} + a_{xz}\dfrac{d\zeta}{dz}, \quad p_{yy} = a_{xy}\dfrac{d\xi}{dx} + 3a_{yy}\dfrac{d\eta}{dy} + a_{yz}\dfrac{d\zeta}{dz}, \\ p_{zz} = a_{xz}\dfrac{d\xi}{dx} + a_{zy}\dfrac{d\eta}{dy} + 3a_{zz}\dfrac{d\zeta}{dz}, \end{cases}$$

$$(2)\quad p_{yz} = a_{yz}\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right), \quad p_{zx} = a_{zx}\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right), \quad p_{xy} = a_{xy}\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right).$$

» Les équations différentielles indéfinies, à satisfaire pour tous les points du corps, sont

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_{xx}}{dx} + \dfrac{dp_{xy}}{dy} + \dfrac{dp_{xz}}{dz} = -\rho X, \quad \dfrac{dp_{xy}}{dx} + \dfrac{dp_{yy}}{dy} + \dfrac{dp_{yz}}{dz} = -\rho Y, \\ \dfrac{dp_{zx}}{dx} + \dfrac{dp_{yz}}{dy} + \dfrac{dp_{zz}}{dz} = -\rho Z. \end{cases}$$

» Les équations définies, à satisfaire pour les points de la surface, sont

$$(4)\quad \begin{cases} p_{xx}C_{nx} + p_{xy}C_{ny} + p_{xz}C_{nz} = \varpi C_{\varpi x}, \quad p_{xy}C_{nx} + p_{yy}C_{ny} + p_{yz}C_{nz} = \varpi C_{\varpi y}, \\ p_{xx}C_{nx} + p_{yz}C_{ny} + p_{zz}C_{nz} = \varpi C_{\varpi z}. \end{cases}$$

» **3.** Les coefficients différentiels du second membre des expressions (1) ne sont autre chose que les *dilatations* en divers sens. Les binômes différentiels du second membre des expressions (2) sont ce que j'ai appelé les *glissements* estimés en divers sens (*Comptes rendus* des 30 octobre et 6 novembre, n^{os} 2 et suivants). L'un des deux termes représente le déplacement angulaire d'une petite face, et l'autre celui de la droite matérielle qui lui était primitivement perpendiculaire.

» Si l'élasticité est la même autour de l'axe des x supposé celui d'une pièce solide, on a

$$a_{xz} = a_{xy}, \quad a_{yy} = a_{zz} = a_{yz},$$

et toutes les quantités a sont égales si l'élasticité est la même dans tous les sens; alors les équations (1) donnent

$$p_{xx} = \frac{5}{2}a\frac{d\xi}{dx} + \frac{p_{yy} + p_{zz}}{4},$$

et, si p_{yy}, p_{zz} sont nuls,

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{d\zeta}{dz} = -\frac{1}{4}\frac{d\xi}{dx},$$

ce qui n'est autre chose que les expressions invoquées nos 3 et 5 du Mémoire du 30 octobre, car a est ce que nous avons appelé G, $\frac{5}{2}a$ ce que nous avons appelé E, p_{yy}, p_{zz} sont ce qui avait été nommé $-\pi_u$, $-\pi_v$.

» 4. Supposons que le corps soit un prisme. Soient

» ω sa section, à la distance x de l'origine des coordonnées;

» $d\omega$ l'élément, au point m, dont les coordonnées transversales sont y, z. On suppose ces coordonnées parallèles aux axes principaux de la section (en sorte qu'elles ont les mêmes significations que u, v aux Mémoires précités).

» M_t le moment de torsion, ou le moment autour de l'axe du prisme (axe des x) des pressions aux divers points de la section ω.

» On aura

$$(5) \qquad M_t = \int_0^\omega (p_{xz}y - p_{xy}z)\, d\omega.$$

» 5. La méthode générale employée par MM. Poisson et Cauchy pour éviter une intégration impossible dans l'état actuel des connaissances, est, dans le cas d'une *pièce* solide dont les dimensions transversales sont, en général, petites par rapport aux autres données, de supposer que les pressions p et les déplacements ξ, η, ζ sont développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et positives des coordonnées que nous avons représentées par y, z, et de négliger, à diverses époques du calcul, les termes d'ordre supérieur devant ceux d'ordre inférieur.

» Désignons par p^0, $\frac{dp^0}{dy}$, $\frac{d^2p^0}{dy\,dz}$, ..., ξ^0, $\frac{d\xi^0}{dy}$, ..., les valeurs des pressions et déplacements, et de leurs coefficients différentiels, au centre de la section où l'on a $y = 0$, $z = 0$; nous aurons

$$(6)\left\{\begin{aligned} p = {} & p^0 + \frac{dp^0}{dy}y + \frac{dp^0}{dz}z + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2p^0}{dy^2}y^2 + \frac{d^2p^0}{dydz}yz + \frac{d^2p^0}{dz^2}z^2\right) \\ & + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3p^0}{dy^3}y^3 + 3\frac{d^3p^0}{dy^2dz}y^2z + 3\frac{d^3p^0}{dydz^2}yz^2 + \frac{d^3p^0}{dz^3}z^3\right) + \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

(7) Et ξ, η, ζ, ainsi que X, Y, Z = des développements semblables.

» **6**. Si l'on substitue ces développements dans les équations (1), (2), (3), et si l'on assimile, dans les deux membres, les coefficients des mêmes puissances ou produits de y et z, on verra que l'on peut, dans ces trois équations, remplacer à volonté les quantités qui y entrent par ces mêmes quantités, ou leurs coefficients différentiels d'ordre quelconque, affectées de l'indice o.

» **7**. Et, si on les substitue dans l'expression du moment de torsion, en supposant la section symétrique, ou telle que $\int y^3 d\omega = 0$, $\int yz^2 d\omega = 0$, $\int y^2 z d\omega = 0$ $\int z^3 d\omega = 0$, on aura

$$(8) \qquad M_t = \frac{dp^0_{xz}}{dy}\int y^2 d\omega - \frac{dp^0_{xy}}{dz}\int z^2 d\omega + \frac{1}{2}\left(\frac{d^3 p^0_{xz}}{dy dz^2} - \frac{d^3 p^0_{xy}}{dy^2 dz}\right)\int y^2 z^2 d\omega + \text{etc.}$$

§ III. — *Cas d'un prisme à base rectangle.*

» **8**. Soient $2h$, $2i$ les deux côtés de la base, parallèlement aux y et aux z;

» $\mu = \int z^2 d\omega = \frac{2}{3} h i^3$, $\mu' = \int y^2 d\omega = \frac{2}{3} h^3 i$ les moments d'inertie de la section autour des axes des y et des z;

» G la valeur des quantités a_{xx}, a_{xy}, etc., quand elles sont toutes égales;

» θ la torsion, ou l'angle dont les sections ont tourné l'une devant l'autre, pour une distance égale à l'unité.

» Supposons les pressions extérieures nulles, les équations définies (4) deviendront

$$(9) \qquad p_{yy} = 0, \quad p_{xy} = 0, \quad p_{yz} = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm h, \quad \text{quel que soit } z,$$

$$(10) \qquad p_{zz} = 0, \quad p_{xz} = 0, \quad p_{yz} = 0 \quad \text{pour} \quad z = \pm i, \quad \text{quel que soit } y.$$

» Si l'on substitue, dans les premières, le développement (6), on aura une suite de relations telles que

$$p^0 + \frac{dp^0}{dy}h + \frac{1}{2}\frac{d^2p^0}{dy^2}h^2 + \ldots = 0, \qquad \frac{dp^0}{dz} + \frac{2}{2}\frac{d^2p^0}{dy\,dz} + \frac{3}{2.3}\frac{d^3p^0}{dy^2dz}h^2 + \ldots = 0, \text{ etc.};$$

$$p^0 - \frac{dp^0}{dy}h + \frac{1}{2}\frac{d^2p^0}{dy^2}h^2 - \ldots = 0, \qquad \frac{dp^0}{dz} - \frac{2}{2}\frac{d^2p^0}{dy\,dz} + \frac{3}{2.3}\frac{d^3p^0}{dy^2dz}h^2 + \ldots = 0, \text{ etc.}$$

» L'addition et la soustraction successive de ces relations les remplacera par celles-ci, qui sont plus simples:

$$(11)\left\{\text{Pour}\ \begin{array}{l} p_{xy} \\ p_{yz} \\ p_{yy} \end{array}\left\{\begin{array}{l} p^0+\frac{d^2p^0}{dy^2}\frac{h^2}{2}+\ldots=0,\quad \frac{dp^0}{dz}+\frac{d^3p^0}{dy^2dz}\frac{h^2}{2}+\ldots=0, \\ \frac{d^2p^0}{dz^2}+\frac{d^4p^0}{dy^2dz^2}\frac{h^2}{2}+\ldots=0,\ \text{etc.}, \\ \frac{dp^0}{dy}+\frac{d^3p^0}{dy^3}\frac{h^2}{6}+\ldots=0,\quad \frac{d^2p^0}{dydz}+\frac{d^4p^0}{dy^3dz}+\ldots=0,\ \text{etc.} \end{array}\right.\right.$$

» Les équations (10) donneront de même

$$(12)\left\{\text{Pour}\ \begin{array}{l} p_{xz} \\ p_{yz} \\ p_{zz} \end{array}\left\{\begin{array}{l} p^0+\frac{d^2p^0}{dz^2}\frac{i^2}{2}+\ldots=0,\quad \frac{dp^0}{dy}+\frac{d^2p^0}{dydz^2}\frac{i^2}{2}+\ldots=0, \\ \frac{d^2p^0}{dy^2}+\frac{d^4p^0}{dy^2dz^2}\frac{i^2}{2}+\ldots=0,\ \text{etc.}, \\ \frac{dp^0}{dz}+\frac{d^3p^0}{dz^3}\frac{i^2}{6}+\ldots=0,\quad \frac{d^2p^0}{dydz}+\frac{d^4p^0}{dy^3dz}\frac{i^2}{6}+\ldots=0,\ \text{etc.} \end{array}\right.\right.$$

» **9.** On remarque que p_{yz} appartient aux relations (12) comme aux relations (11); on peut donc tirer p_{yz}^0 de la première de chacune d'elles, puis y mettre, pour les coefficients différentiels du deuxième ordre, leurs valeurs tirées de la troisième relation de l'autre série; on aura ainsi

$$p_{yz}^0=-\frac{d^2p_{yz}^0}{dy^2}\frac{h^2}{2}+\ldots=-\frac{d^3p^0}{dz^2}\frac{i^2}{2}+\ldots=\frac{h^2i^2}{4}\frac{d^4p_{yz}^0}{dy^2dz^2}+\text{etc.},$$

d'où il suit que p_{yz}^0 n'a qu'une valeur qui dépend de termes du quatrième ordre, et peut être supposé nul. Il en résulte, d'après la première équation (2), et ce que nous avons dit (6),

$$(13)\qquad \frac{d\eta^0}{dz}+\frac{d\zeta^0}{dy}=0,$$

c'est-à-dire que le glissement sur une section longitudinale du prisme a une composante transversale nulle.

» Cette équation (13) exprime aussi que deux droites primitivement parallèles aux y et aux z, tracées sur la section ω et se coupant au centre de cette section, sont restées perpendiculaires entre elles après le déplacement des points du corps; mais chacun des termes dont son premier membre se compose représente la grandeur angulaire de la rotation effectuée par ces deux droites autour de l'axe du prisme. On a donc, pour la torsion,

$$(14)\qquad \theta=\frac{d}{dx}\frac{d\zeta^0}{dy}=-\frac{d}{dx}\frac{d\eta^0}{dz}.$$

En sorte que les équations (2) donnent, d'après ce qu'on a observé (n° **6**),

$$(15)\qquad \frac{dp^0_{xz}}{dy} = a_{xz}\left(\theta + \frac{d^2\xi^0}{dy\,dz}\right), \quad \frac{dp^0_{xy}}{dz} = a_{xy}\left(-\theta + \frac{d^2\xi^0}{dy\,dz}\right);$$

d'où, en éliminant $\frac{d^2\xi^0}{dy\,dz}$,

$$(16)\qquad \frac{1}{a_{xz}}\frac{dp^0_{xz}}{dy} - \frac{1}{a_{xy}}\frac{dp^0_{xy}}{dz} = 2\theta.$$

» **10.** Il s'agit d'avoir une autre relation entre $\frac{dp^0_{xz}}{dy}$, $\frac{dp^0_{xy}}{dz}$, qui entrent dans l'expression (8) du moment de torsion, afin de pouvoir y substituer leur valeur en fonction de la torsion θ.

» Servons-nous, pour cela, de la première équation indéfinie (3), savoir

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = -\rho X.$$

Elle donne, d'après ce que nous avons vu (n° **6**),

$$(17)\qquad \frac{d^3p^0_{xx}}{dx\,dy\,dz} + \frac{d^3p^0_{xy}}{dy^2dz} + \frac{d^3p^0_{xz}}{dy\,dz^2} = -\rho\frac{d^2X^0}{dy\,dz}.$$

Mais les relations (11), (12), qui viennent des équations définies, donnent

$$(18)\qquad \frac{dp^0_{xz}}{dy} = -\frac{d^3p^0_{xz}}{dy\,d^2z}\frac{i^2}{2} + \ldots, \quad \frac{dp^0_{xy}}{dz} = -\frac{d^3p^0_{xy}}{dy^2\,dz}\frac{h^2}{2} + \ldots;$$

d'où

$$(19)\ h^2\frac{dp^0_{xz}}{dy} + i^2\frac{dp^0_{xy}}{dz} = -\frac{h^2i^2}{2}\left(\frac{d^3p^0_{xz}}{dy\,d^2z} + \frac{d^3p^0_{xy}}{dy^2\,dz}\right) + \text{termes du sixième ordre.}$$

Les termes entre parenthèses du deuxième membre, considérés un à un, ne sauraient être supprimés, quoique affectés du produit du quatrième ordre h^2i^2, car les équations (18) prouvent qu'ils sont, ainsi multipliés, du même ordre de grandeur que ceux du premier membre affectés des simples carrés de h et i. Mais l'équation précédente (17) prouve que leur somme peut être effacée; en effet, en la tirant de cette équation, et substituant dans celle (19), celle-ci devient

$$(20)\ h^2\frac{dp^0_{xz}}{dy} + i^2\frac{dp^0_{xy}}{dz} = \frac{h^2i^2}{2}\left(\frac{d^3p^0_{xx}}{dx\,dy\,dz} + \rho\frac{d^2X^0}{dy\,dz}\right) + \text{termes du sixième ordre.}$$

Or, ce qui se trouve dans la parenthèse du second membre n'est plus d'un ordre de grandeur supérieur aux coefficients différentiels qui entrent dans le premier membre, car la traction ou pression longitudinale p^0_{xx}, suivant l'axe du prisme, ne varie jamais brusquement ou très-rapidement, dans aucun des trois sens des x, des y, des z, et l'on peut en dire autant de la composante de force accélératrice X_0. Il n'y a d'exception, tout au plus, en ce qui regarde la traction longitudinale, qu'en des points tout à fait particuliers, comme ceux où sont appliquées les forces isolées; or, ce qui se passe à ces points, ou tout auprès, n'étend pas sensiblement son influence sur le reste, et nous avons dit, au Mémoire du 30 octobre, que tout ce que l'on donne dans la théorie de la résistance des solides regarde seulement les points à une certaine distance de ceux-là.

» On peut donc supprimer le deuxième membre de l'équation précédente comme d'une grandeur négligeable, et l'on a, pour la relation cherchée,

$$h^2 \frac{dp^0_{xz}}{dy} + i^2 \frac{dp^0_{xy}}{dz} = 0, \tag{21}$$

qui donne, avec (16),

$$\frac{dp^0_{xz}}{dy} = \frac{2i^2}{\frac{h^2}{a_{xy}} + \frac{i^2}{a_{xz}}}\theta, \qquad \frac{dp^0_{xy}}{dz} = \frac{-2h^2}{\frac{h^2}{a_{xy}} + \frac{i^2}{a_{xz}}}\theta. \tag{22}$$

» **11**. On peut remplacer les rapports des carrés h^2, i^2 par celui des moments d'inertie μ', μ. Substituant dans l'expression générale (8) du moment de torsion, en n'y conservant que les deux premiers termes, on a

$$M_t = \frac{4\mu\mu'}{\frac{\mu}{a_{xz}} + \frac{\mu'}{a_{xy}}}\theta, \tag{23}$$

ou, si $a_{xz} = a_{xy} = G$,

$$M_t = G\frac{2\mu . 2\mu'}{\mu + \mu'}\theta, \tag{24}$$

ou, encore,

$$M_t = \frac{16}{3} G \frac{h^3 i^3}{h^2 + i^2}\theta. \tag{25}$$

» **12**. Voyons en quoi cette expression diffère de celle de la théorie ancienne : celle-ci donnait

$$M_l = G\theta(\mu + \mu'), \quad \frac{dp^{\circ}_{xz}}{dy} = G\theta, \quad \frac{dp^{\circ}_{xy}}{dz} = -G\theta.$$

Si l'on compare ces expressions à celles (15), on voit que la théorie ancienne supposait nul le coefficient différentiel $\frac{d^2\xi^{\circ}}{dy\,dz}$; et c'était à tort, car en mettant dans l'une des équations (15), à la place de $\frac{dp^{\circ}_{xz}}{dy}$ ou $\frac{dp^{\circ}_{xy}}{dz}$, sa valeur (22), on trouve

$$(26) \qquad \frac{d^2\xi^{\circ}}{dy\,dz} = \frac{\frac{\mu'}{a_{xy}} - \frac{\mu}{a_{xz}}}{\frac{\mu'}{a_{xy}} + \frac{\mu}{a_{xz}}}\theta;$$

d'où il suit que $\frac{d^2\xi^{\circ}}{dy\,dz}$ ne saurait être nul, à moins que la torsion θ ne soit nulle elle-même, ou que les deux moments d'inertie μ, μ' ne soient égaux (lorsque l'élasticité est la même dans les deux sens transversaux).

» Or, que représente cette quantité $\frac{d^2\xi^{\circ}}{dy\,dz}$, négligée par l'ancienne théorie?

» Pour le savoir, posons $\frac{d^2\xi}{dy\,dz} = \gamma$; nous en tirerons, en supposant ξ nul en même temps que y et z,

$$\xi = \gamma y z;$$

c'est l'équation d'une surface gauche dans le genre d'une double aile de moulin à vent : on voit, par les changements de signe dans les quatre angles droits formés par les axes y et z, que cette surface est composée de quatre parties symétriques, dont deux formant creux et les deux autres saillie sur le plan $\xi = 0$.

» Or, ξ est la petite quantité dont un point matériel d'une section s'est éloigné du plan primitif de cette section. Donc la section, de plane qu'elle était, est devenue gauche, et γ mesure le degré de son *gauchissement*, au moins quand on se borne aux points peu éloignés du centre de la section, ou quand on néglige les quantités du second ordre.

» L'ancienne théorie était donc inexacte, en ce qu'elle négligeait le gauchissement des sections; elle donnait des moments trop forts, car les éléments des sections, en s'inclinant par rapport à l'axe du prisme, ainsi qu'ils y sont sollicités, prennent moins d'inclinaison sur les lignes matérielles qui leur étaient primitivement normales, que si ces éléments restaient tous dans le même plan.

§ IV. — *Correction numérique à faire au moment de torsion.*

» **13**. Cette correction vient de la prise en considération du terme du quatrième ordre de l'expression (8), que nous avons supprimé au n° **11**.

» Si l'on tire des relations (10) et (11) les valeurs des coefficients différentiels du troisième ordre $\frac{d^3 p^0_{xz}}{dy\,dz^2}$, $\frac{d^3 p^0_{xy}}{dy\,dz^2}$, en fonction de ceux d'ordre inférieur, on verra qu'il fallait prendre

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} p_{xz} &= \left(1 - \frac{z^2}{i^2}\right)\left(p^0_{xz} + \frac{dp^0_{xz}}{dy}y + \frac{dp^0_{xz}}{dz}z + \ldots\right),\\ p_{xy} &= \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)\left(p^0_{xy} + \frac{dp^0_{xy}}{dy}y + \frac{dp^0_{xy}}{dz}z + \ldots\right).\end{aligned}\right.$$

D'où il résulterait qu'il faudrait multiplier par $\frac{2}{3}$ l'expression (23) du moment de torsion pour la rendre exacte.

» Mais la substitution indéfinie, aux coefficients différentiels d'ordre supérieur, de leurs valeurs en fonction de ceux d'ordre inférieur tirées de (10) et (11), conduirait à l'absurde; et comme les conditions de nullité de p_{xz}, p_{xy} pour $z = \pm i$, $y = \pm h$, sont aussi bien remplies en donnant $1 - \frac{z^{2n}}{i^{2n}}$, $1 - \frac{y^{2n}}{h^{2n}}$, pour facteur à (27), qu'en leur donnant $1 - \frac{z^2}{i^2}$, $1 - \frac{y^2}{h^2}$, et comme ces pressions ne décroissent peut-être sensiblement qu'à de très-petites distances du contour des sections, il est possible que la correction à faire soit beaucoup moindre que celle qui résulte du facteur $\frac{2}{3}$. On pense qu'il faut l'emprunter à l'expérience.

» Or les expériences connues prouvent qu'elle doit être faible. Celles de Savart semblent indiquer qu'il faut prendre 0,9 pour coefficient de correction du moment de torsion, et généralement de toutes les formules (Mémoires précités) où entre la constante G.

§ V. — *Cas d'un prisme à base losange.*

» **14**. Soient h, i les deux demi-diagonales du losange, parallèles aux y et aux z. Supposons toujours les pressions extérieures nulles; les équations définies (4) donneront, sur les quatre côtés du losange,

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{ll} -hp_{xz}-ip_{xy}=0 \text{ pour } y=h\left(1-\frac{z}{i}\right) & \text{quel que soit } z, \\ hp_{xz}+ip_{xy}=0 \text{ pour } y=-h\left(1+\frac{z}{i}\right) & \text{quel que soit } z, \\ hp_{xz}-ip_{xy}=0 \text{ pour } y=h\left(1+\frac{z}{i}\right) & \text{quel que soit } z, \\ -hp_{xz}+ip_{xy}=0 \text{ pour } y=-h\left(1-\frac{z}{i}\right) & \text{quel que soit } z. \end{array}\right.$$

Substituant les développements (7) de p_{xz}, p_{xy}, ordonnant par rapport à z et égalant à zéro les coefficients des mêmes puissances de z, on aura une suite de relations que l'on réduira à d'autres plus simples en les ajoutant ensemble deux à deux ou en les soustrayant l'une de l'autre. En ordonnant par rapport à y, on aurait des équations qui n'en différeraient que par la forme.

» Parmi toutes ces équations on prendra celles-ci :

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{dp_{xz}^0}{dy}+\frac{h^2}{6}\frac{d^3p_{xz}^0}{dy^3}+\ldots=0,\quad \frac{dp_{xy}^0}{dz}+\frac{i^2}{6}\frac{d^3p_{xz}^0}{dz^3}+\ldots=0, \\ -\frac{h^2}{i^2}\frac{dp_{xz}^0}{dy}+\frac{dp_{xy}^0}{dz}-\frac{3}{6}\frac{h^4}{i^2}\frac{d^3p_{xz}^0}{dy^3}+\frac{h^2}{2}\frac{d^3p_{xy}^0}{dy^2\,dz}+\ldots=0, \\ -\frac{h^4}{6i^4}\frac{d^3p_{xz}^0}{dy^3}+\frac{h^2}{2i^2}\frac{d^3p_{xy}^0}{dy^2\,dz}-\frac{h^2}{2i^2}\frac{d^3p_{xz}^0}{dy\,dz^2}+\frac{1}{6}\frac{d^3p_{xz}^0}{dz^3}+\ldots=0. \end{array}\right.$$

» Si l'on y joint l'équation (17), on pourra éliminer tout, excepté

$$\frac{dp_{xz}^0}{dy},\ \frac{dp_{xy}^0}{dz}\quad \text{et}\quad \frac{d^3p_{xx}^0}{dx\,dy\,dz}+\rho\frac{d^2X_0}{dy\,dz};$$

cette dernière somme sera, comme dans l'équation (20), affectée de h^2i^2; on la supprimera comme nous avons fait au n° **11**, ce qui donnera

$$3h^2\frac{d^0p_{xz}}{dy}+3i^2\frac{dp_{xy}^0}{dz}=0,$$

c'est-à-dire précisément la même relation (21) que nous avons trouvée pour le rectangle.

» Il en résulte que l'on a, pour un prisme à base losange, les mêmes expressions (24) et (26) du moment de torsion, et du gauchissement, que pour un prisme à base rectangle. »