MÉCANIQUE. — *Deuxième Note sur l'état d'équilibre d'une verge élastique à double courbure, lorsque les déplacements éprouvés par ses points ne sont pas très-petits; par* M. DE SAINT-VENANT.

(Commission précédemment nommée.)

« 1. Dans la Note insérée au *Compte rendu* du 1er juillet, j'ai fait remarquer que le théorème de Poisson, consistant en ce que *le moment de torsion* (θ ou M_t) *est constant dans toute l'étendue d'une verge élastique* (*), ne s'observe qu'à condition que *le moment des forces autour du rayon de courbure soit partout nul.*

» Cette condition n'est remplie *pour tous les systèmes de forces* qui peuvent agir aux extrémités de la verge, ainsi qu'à ses divers points, d'une manière continue que lorsque l'*axe* est rectiligne dans l'état primitif, et que les sections transversales sont toutes des *figures régulières* (en appelant généralement ainsi les figures où toutes les droites tracées dans leur plan par leur centre de gravité sont des axes principaux d'inertie).

» On verra plus loin qu'elle peut encore être remplie lorsque l'axe primitif est une hélice, mais seulement pour des systèmes particuliers de forces.

» Je me propose, dans cette Note, d'ajouter plusieurs observations à celles que contient la Note précédente, et de considérer divers cas où l'on peut déterminer facilement l'état d'équilibre de la verge pour des déplacements d'une grandeur quelconque.

» 2. Nous appellerons :

M_ρ, M_n les moments totaux des forces extérieures qui agissent, après les déplacements, entre le point M de la verge et l'une de ses extrémités, autour : 1° du rayon de courbure de l'axe au point M; 2° d'une droite normale au plan osculateur.

(En sorte que M_n, $-M_\rho$ seront ce qui est désigné par M_u, M_v au n° 5 de la Note citée, ces deux dernières désignations étant conservées pour les moments autour des axes principaux d'inertie de la section en M quand elle n'en a que deux.)

X, Y, Z les binômes $dy\,d^2z - dz\,d^2y,\ dz\,d^2x - dx\,d^2z,\ dx\,d^2y - dy\,d^2x.$

On aura, M_x, M_y, M_z étant toujours les moments autour de parallèles aux

(*) *Correspondance de l'École Polytechnique,* 1816, ou *Traité de Mécanique,* 2e édition.

coordonnées menées par M,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} M_n &= \frac{\rho X}{ds^3} M_x + \frac{\rho Y}{ds^3} M_y + \frac{\rho Z}{ds^3} M_z, \\ M_\rho &= M_x \frac{\rho}{ds} d\frac{dx}{ds} + M_y \frac{\rho}{ds} d\frac{dy}{ds} + M_z \frac{\rho}{ds} d\frac{dz}{ds}, \\ M_l &= \frac{dx}{ds} M_x + \frac{dy}{ds} M_y + \frac{dz}{ds} M_z. \end{aligned}\right.$$

» Observons d'abord que, dans le cas général où le moment M_ρ n'est pas nul, il se trouve lié avec celui de torsion M_l ou θ par une relation qui remplace le théorème $dM_l = 0$ de Poisson. Cette relation générale, que M. Wantzel a reconnue et m'a fait apercevoir, est

$$(13)\qquad \frac{dM_l}{ds} = \frac{M_\rho}{\rho}.$$

En effet, si l'on différentie la troisième équation (12), on a, eu égard à la deuxième et à ce que

$$\frac{dx}{ds} dM_x + \frac{dy}{ds} dM_y + \frac{dz}{ds} dM_z = 0 \ (^*),$$

précisément la relation que nous venons d'écrire.

» Observons encore que, dans tous les cas où la section est une *figure régulière*, on peut, comme au n° 5 de la première Note, supposer $e + \varepsilon = 0$, ce qui réduit les équations (6) à

$$(14)\quad M_n = E\mu\left(\frac{1}{\rho} - \frac{\cos\varepsilon}{\rho_0}\right), \quad M_\rho = E\mu\frac{\sin\varepsilon}{\rho_0}, \quad M_l = 2G\mu\left(\frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Mais, tant que M_ρ ne disparaît pas, l'intégration paraît toujours difficile.

» **3.** Le cas où M. Binet, et ensuite M. Wantzel, ont intégré les équations, est celui où l'on a, non-seulement $\frac{1}{\rho_0} = 0$, $\frac{1}{r_0} = 0$, mais encore μ constant, et où les forces n'agissent qu'à l'extrémité de la verge, en sorte qu'en les réduisant à une seule force g, et à un couple h, perpendiculaire à sa direction, on

(*) *Voyez* ce résultat aux n^{os} **317, 318** de la *Mécanique* de Poisson, où ce que nous appelons M_x est désigné par $X_1 + P' + R(b - y) - Q(c - z)$, et ainsi des deux autres moments.

a, celle-ci étant prise pour axe des z,

$$M_x = gy, \quad M_y = -gx, \quad M_z = h.$$

» 4. L'intégration est encore facile dans le cas où la section de la verge peut varier de grandeur et même de forme d'un point à l'autre de l'axe primitivement rectiligne, mais sans cesser d'être *régulière*, et où les forces se réduisent à des *couples* agissant dans des plans parallèles entre eux.

» Alors μ varie, le couple h peut varier aussi d'une manière continue, et l'on a, en prenant toujours l'axe des z perpendiculaire aux plans des couples,

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = h, \quad \frac{1}{\rho_0} = 0, \quad \frac{1}{\tau_0} = 0.$$

Les équations (12) et (14) donnent

$$M_\rho = 0 = h\frac{\rho}{ds}d\frac{dz}{ds}, \quad M_l = h\frac{dz}{ds} = \text{const.}$$

Donc la courbe affectée par l'axe de la verge fait un angle constant avec le plan des couples. Appelons φ cet angle; si l'on observe que

$$M_z = M_n\frac{\rho X}{ds^3} + M_l\frac{dz}{ds},$$

on a, pour déterminer x, y, z en s, les trois équations différentielles

$$(15) \quad \frac{dz}{ds} = \sin\varphi, \quad dx^2 + dy^2 = ds^2\cos^2\varphi, \quad dxd^2y - dyd^2x = \frac{hds^3}{E\mu}\cos^2\varphi.$$

Elles donnent, en différentiant la seconde,

$$d^2x = -\frac{h}{E\mu}dyds, \quad d^2y = \frac{h}{E\mu}dxds,$$

et. en remplaçant, dans celles-ci,

$$dy \text{ par } \sqrt{ds^2\cos^2\varphi - dx^2}, \quad dx \text{ par } -\sqrt{ds^2\cos^2\varphi - dy^2},$$

elles s'intègrent, et l'on a, en supposant $s = 0$ pour $z = 0$,

$$(16) \quad x = -\cos\varphi\int ds \sin\int\frac{hds}{E\mu}, \quad y = \cos\varphi\int ds\cos\int\frac{hds}{E\mu}, \quad z = s\sin\varphi.$$

Les équations de l'axe s'obtiennent donc par des quadratures qui dépendent de la manière dont $\frac{h}{E\mu}$ est fonction de s.

» **5**. Si $\frac{h}{E\mu}$ est constant, elles deviennent (c, c', c'', c''' étant des constantes arbitraires),

$$x = c'' + \frac{E\mu\cos\varphi}{h}\cos\left(c + \frac{hs}{E\mu}\right),\quad y = c''' + \frac{E\mu\cos\varphi}{h}\sin\left(c' + \frac{hs}{E\mu}\right),\quad z = s\sin\varphi.$$

Elles appartiennent à une hélice.

» Déjà M. Wantzel, dans une communication faite le 29 juin à la Société Philomatique, a remarqué que la courbe à double courbure, affectée par une verge primitivement cylindrique, sollicitée par un couple, est nécessairement une hélice.

» C'est une généralisation du résultat d'Euler (*), consistant en ce que lorsque la courbe provenant de la verge, ainsi sollicitée, est plane, elle ne peut être qu'un arc de cercle.

» **6**. Si la verge est encastrée à l'une de ses extrémités, on peut prendre ce point pour origine des coordonnées, et un plan passant par la direction primitive de la verge pour plan des yz. Les constantes doivent être déterminées de manière que pour $s = 0$, on ait $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{dx}{ds} = 0$, $\frac{dy}{ds} = \cos\varphi$, et les équations de la courbe deviennent :

$$x + \frac{E\mu\cos\varphi}{h} = \frac{E\mu\cos\varphi}{h}\cos\frac{hs}{E\mu},\quad y = \frac{E\mu\cos\varphi}{h}\sin\frac{hs}{E\mu},\quad z = s\sin\varphi.$$

» Le cylindre sur lequel l'hélice est enroulée a donc sa base parallèle au plan du couple; le centre de cette base est à une distance de l'axe primitif de la verge et du point d'encastrement, égale à son rayon $\frac{E\mu}{h}\cos\varphi$, et l'inclinaison constante φ du filet de l'hélice sur la base est celle de l'axe primitif sur le plan du couple.

» **7**. L'axe étant déterminé, si l'on veut connaître la position des points de la verge hors de l'axe, il faut déterminer les valeurs de l'angle ε. On obtient d'abord facilement, au moyen des équations différentielles,

---

(*) *Methodus inveniendi*, etc., *additamentum de curvis elasticis*.

(17) $$\frac{1}{\tau} = \frac{h \sin \varphi}{E\mu};$$

substituant dans $2G\mu\left(\frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{1}{\tau}\right) = M_l = h \sin \varphi$, on a

$$\varepsilon = \left(\frac{E}{2G} - 1\right) \sin \varphi \int \frac{h\, ds}{E\mu},$$

ou, lorsque $\frac{h}{E\mu}$ est constant et que l'on fait passer par l'axe des x le plan osculateur primitif et arbitraire de la verge droite, ce qui donne $\varepsilon = 0$ au point d'encastrement,

$$\varepsilon = \left(\frac{E}{2G} - 1\right) \frac{hz}{E\mu}.$$

Les droites matérielles qui, sur chaque section, se trouvaient primitivement dans ce plan, font maintenant ces angles ε avec les plans osculateurs de l'hélice, ce qui détermine complétement les positions nouvelles des divers points des sections.

» On déterminerait facilement, de même, $\frac{1}{\tau}$ et $\varepsilon = \int \left(\frac{M_l}{2G\mu} - \frac{1}{\tau}\right) ds$ dans le cas du n° **3**, traité par MM. Binet et Wantzel.

» **8.** Observons à ce sujet que lorsquela verge, primitivement droite et à section régulière, est assujettie à une de ses deux extrémités seulement, et libre ou simplement appuyée à l'autre, le calcul de ε n'est pas nécessaire pour déterminer les constantes de l'équation de l'*axe*. La forme de cet axe, et sa position, peuvent être déduites complétement, alors, des équations différentielles de Lagrange, complétées et intégrées par M. Binet.

» Mais, ainsi que nous l'avons dit à la Note du 1er juillet, l'intervention de l'angle ε est indispensable en général, par exemple lorsque la verge, même droite et à section régulière, est assujettie en un second point où sa section doive observer, comme à celui d'encastrement, une certaine polarité, ainsi qu'il arriverait si une verge à section carrée devait, quelque part, passer par un trou carré de mêmes dimensions que la section. Alors, pour fixer les valeurs des forces indéterminées produisant l'assujettissement, et qui entrent nécessairement dans les équations différentielles, il faudrait poser la condition que toutes les lignes matérielles de la section, en cet endroit, se sont conservées parallèles à leurs directions primitives : or, on y parvient en exprimant que celle de ces lignes qui faisait primitivement un angle nul avec le plan choisi pour plan osculateur, fait, avec le plan osculateur nouveau, précisément l'angle $\int\left(\frac{M_1}{2G\mu}-\frac{1}{\tau}\right)ds=\varepsilon$. C'est ainsi que nous avons déjà opéré (Mémoire du 6 novembre 1843, n° **26**, *Comptes rendus*, t. XVII, p. 1026) pour déterminer la petite flexion d'un anneau encastré et sollicité par des forces perpendiculaires à son plan.

» **9**. Supposons enfin que la verge ait primitivement la forme d'une hélice.

» La solution, donnée au Mémoire du 6 novembre, du problème de son allongement très-petit, prouve que l'hélice *se déforme*, et qu'elle ne resterait une hélice qu'autant que les points d'attache des forces seraient disposés de manière à annuler certaines constantes. Le problème serait compliqué, à plus forte raison, dans le cas de déplacements d'une amplitude quelconque, et on ne voit pas, d'ailleurs, comment on pourrait parvenir alors à une intégration générale des équations (14).

» Mais on peut s'y prendre d'une manière inverse. On peut supposer, comme a fait M. Giulio, de l'Académie de Turin (*Mémoires*, année 1841) que la courbe d'axe, après l'action des forces, est encore une hélice, et chercher quel système de forces remplit cette condition.

» Je ne donne pas le détail du calcul, que j'ai étendu au cas général où les sections transversales de l'hélice, toutes égales et semblablement placées par rapport à l'axe de son cylindre, ne sont cependant pas des figures régulières ou telles que $\mu=\mu'=\mu''$. J'ai trouvé que les forces devaient se réduire à une seule dirigée suivant l'axe du cylindre, et à un couple autour du même axe, et qu'il devait y avoir une certaine relation constante entre les moments M_u et M_v, en sorte que l'on obtient autant d'équations (non différentielles) qu'il en faut pour déterminer le rayon et le pas de la nouvelle hélice.

» Lorsque la section transversale est une figure régulière, on peut prendre M_ρ pour M_v, M_n pour M_u; la relation obligée dont je viens de parler se réduit à

$$M_\rho=0,$$

qui donne

$$\varepsilon=0;$$

en sorte que si l'on appelle g la force, h le moment du couple, R_0 le rayon du cylindre de l'hélice primitive, φ_0 l'angle constant de ses éléments avec la base, R et φ les deux quantités correspondantes dans la nouvelle hélice, on a, pour déterminer celles-ci, la première et la troisième équation (14), ou

$$gR\sin\varphi + h\cos\varphi = E\mu\left(\frac{\cos^2\varphi}{R} - \frac{\cos^2\varphi_0}{R_0}\right),$$

$$-gR\cos\varphi + h\sin\varphi = 2G\mu\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{R} - \frac{\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{R_0}\right),$$

faciles à résoudre par rapport à R et φ pour des valeurs numériques attribuées aux quantités données g, h, R_0, φ_0, μ. Ces formules s'accordent avec celles du Mémoire de M. Giulio, quand g et h ont entre eux une relation telle que l'hélice s'allonge ou se raccourcisse sans se tordre ou se détordre, ou réciproquement : elles s'accordent avec celles que j'ai données le 6 novembre lorsque h est nul, et que $R - R_0$, $\varphi - \varphi_0$ sont très-petits. La circonstance $\varepsilon = 0$, et la supposition que les termes altérant la forme hélicoïdale s'évanouissent, rendent semblables les résultats de nos deux analyses, et les différences que j'avais cru y apercevoir n'étaient qu'apparentes. »

CHIRURGIE. — *Extirpation du scapulum et d'une partie de la clavicule sur un homme âgé de cinquante et un ans; par* M. **Rigaud**, professeur de clinique chirurgicale de la Faculté de Médecine de Strasbourg.

(Commissaires, MM. Roux, Velpeau.)

« Un ancien grenadier de la garde impériale à cheval portait, en 1841, une tumeur de la partie supérieure du bras gauche, pour laquelle M. Rigaud dut faire l'amputation dans l'articulation scapulo-humérale. La plaie résultant de l'opération guérit, et le malade fut bien portant pendant huit mois; mais, au bout de ce temps, on put constater dans la région axillaire la présence d'une tumeur osseuse qui paraissait naître et qui naissait en effet, comme on put s'en convaincre plus tard, de l'angle antérieur du scapulum. M. Rigaud jugea, pour des motifs exposés dans son travail, qu'il était nécessaire d'enlever le scapulum tout entier avec l'extrémité externe de la clavicule, et, cette laborieuse opération ayant été exécutée avec un plein succès, dans le courant de 1842, le malade fut rétabli au bout de deux mois, et n'a pas cessé depuis de jouir d'une bonne santé. »

M. **Denonvilliers**, chef des travaux anatomiques de la Faculté de Paris, chargé par M. *Rigaud* de présenter ce Mémoire à l'Académie, dépose sur le bureau un modèle en plâtre de l'omoplate et de la portion de clavicule enlevées.

M. **Ducros** adresse une Note dans laquelle il donne le résumé et les conclu-