plus de détails; mais les individus que M. Bremser lui avait communiqués n'étaient pas assez bien conservés.

» Comme je n'ai trouvé ces helminthes indiqués dans aucun autre auteur, comme nous ne possédons encore qu'un très-petit nombre d'observations sur les vers des reptiles, et enfin comme je crois retirer des espèces douteuses une de celles que Rudolphi y avait laissées, j'ai pensé qu'il était utile de publier la description de cet animal, en l'accompagnant d'une figure détaillée, et faites sur les animaux au moment où ils venaient de mourir, afin de fixer davantage les idées.

» M. Dujardin est tout à fait du même avis que moi sur la détermination de cette espèce.

» Il a bien voulu me dire, quand je lui ai communiqué mon observation, qu'il avait vu un helminthe très-semblable sur la plèvre d'un singe d'Amérique. La Note qu'il a conservée, et le dessin qu'il en a fait, offrent les plus grandes ressemblances avec ceux que j'ai vus en grand nombre dans ce lézard.

» Il y a lieu de croire que d'autres mammifères nourrissent aussi de ces parasites, car un célèbre anatomiste, à qui j'ai montré cette espèce de ver, croit se rappeler en avoir observé de très-voisins sur le péritoine d'un lapin. »

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — *Mémoire sur les lignes courbes non planes; par* M. DE SAINT-VENANT.

(Commissaires, MM. Poinsot, Lamé, Binet.)

« 1. Lorsqu'on applique les formules de la géométrie analytique à divers problèmes, on éprouve souvent le besoin d'en connaître l'interprétation détaillée et les démonstrations les plus directes.

» J'ai eu à faire cette étude sur les formules fondamentales de la théorie des courbes dans l'espace, et j'en présente le résultat dans la première partie de ce Mémoire.

» Le but principal de la seconde partie est de fixer, comme il serait temps de le faire, le choix de termes convenables pour désigner les affections de ces lignes: je montre les méprises et les contradictions que peut amener l'usage de quelques dénominations non encore généralement adoptées, et je propose mon propre choix que je soumets aux géomètres.

» La troisième partie offre un tableau de formules et de leurs combinaisons principales servant à simplifier les calculs et à les rendre praticables.

» Dans la quatrième je poursuis la recherche des propriétés des lignes non planes, et je donne constamment des démonstrations géométriques à côté des résultats analytiques.

PREMIÈRE PARTIE. — *Formules fondamentales.*

» **2.** Soient $\frac{ds}{\rho}$, $\frac{ds}{v}$ les angles infiniment petits formés, le premier, par les deux tangentes, le second, par les deux plans osculateurs menés au point M (x, y, z) d'une courbe et au point M' qui est distant de

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

» Sur les deux éléments consécutifs MM', M'M'' formons un parallélogramme : on aura d^2x, d^2y, d^2z pour les projections de sa diagonale, dx, dy, dz pour celles de son premier côté sur les x, y, z, et par suite, en vertu d'un théorème connu et très-facile à démontrer, $dy\,d^2z - dz\,d^2y$, $dz\,d^2x - dx\,d^2z$, $dx\,d^2y - dy\,d^2x$ pour les projections de son aire sur les plans yz, zx, xy.

» Désignons ces binômes par X, Y, Z. L'aire non projetée est $\frac{ds^3}{\rho}$.

» Donc on a immédiatement

$$\frac{ds^3}{\rho} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

et $\frac{\rho X}{ds^3}$, $\frac{\rho Y}{ds^3}$, $\frac{\rho Z}{ds^3}$ sont les cosinus des angles formés, avec les trois plans coordonnés, par le plan osculateur, qui n'est autre chose que celui de ce *parallélogramme de courbure.*

» La même diagonale, projetée successivement sur un des côtés et sur une perpendiculaire à ce côté, donne d^2s et $\frac{ds^2}{\rho}$; d'où

$$\frac{ds^2}{\rho} = \sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}.$$

» **3.** En prolongeant deux des côtés de manière à les rendre égaux à l'unité, et projetant, sur les trois axes, la petite ligne de jonction de leurs extrémités, qui a une longueur $\frac{ds}{\rho}$ et une direction parallèle au rayon du cercle osculateur, on obtient encore

$$\frac{ds}{\rho} = \sqrt{\left(d\,\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dz}{ds}\right)^2};$$

et $\frac{\rho d\frac{dx}{ds}}{ds}$, $\frac{\rho d\frac{dy}{ds}}{ds}$, $\frac{\rho d\frac{dz}{ds}}{ds}$ sont les cosinus des angles de ce rayon avec les x, y, z.

» 4. Soient maintenant deux parallélogrammes de courbure consécutifs MM′M″, M′M″M‴ : l'angle de leurs plans est $\frac{ds}{v}$, et leurs aires sont $\frac{ds^3}{\rho}$, $\frac{ds^3}{\rho} + d.\frac{ds^3}{\rho}$. Formons, sur deux lignes droites numériquement égales à ces aires et normales respectivement aux deux plans, un nouveau parallélogramme : son premier côté aura les projections X, Y, Z, et sa diagonale dX, dY, dZ sur les trois axes, et son aire, $\mathrm{Y}d\mathrm{Z} - \mathrm{Z}d\mathrm{Y}$, $\mathrm{Z}d\mathrm{X} - \mathrm{X}d\mathrm{Z}$, $\mathrm{X}d\mathrm{Y} - \mathrm{Y}d\mathrm{X}$ sur les trois plans.

» Ces binômes reviennent à dx, dy, dz multipliés par un même trinôme

$$\mathrm{X}d^3x + \mathrm{Y}d^3y + \mathrm{Z}d^3z.$$

L'aire non projetée est

$$\frac{ds^6}{\rho^2}\,\frac{ds}{v}.$$

Donc

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{ds^6}{\rho^2} = \mathrm{X}d^3x + \mathrm{Y}d^3y + \mathrm{Z}d^3z.$$

» Cette équation, qui donne v, se démontre encore plus directement si l'on considère que $d^3x\frac{\rho\mathrm{X}}{ds^3} + d^3y\frac{\rho\mathrm{Y}}{ds^3} + d^3z\frac{\rho\mathrm{Z}}{ds^3}$ est la longueur de la perpendiculaire abaissée du point M‴ sur le plan MM′M″, et que, divisée par la longueur $ds\cdot\frac{ds}{\rho}$ de la perpendiculaire abaissée du même point sur l'intersection M′M″ des deux plans, elle doit donner le sinus $\frac{ds}{v}$ de leur petit angle.

» On verra (quatrième partie) que presque tout ce qui regarde les lignes dans l'espace peut s'exprimer en fonction de $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{v}$.

DEUXIÈME PARTIE. — *Considérations sur* $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{v}$.

» 5. Mais les géomètres sont loin d'être d'accord sur les dénominations à imposer à ces deux affections principales $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{v}$ d'une courbe : les uns les appellent *première* et *seconde* courbure; les autres, en aussi grand nombre tout au moins, les appellent *flexions*, ou bien, déniant la qualité de courbure à $\frac{1}{v}$ seulement, la nomment soit *flexion*, soit *torsion* de la courbe.

» **6**. Ces dénominations *flexion*, *torsion*, me paraissent devoir être exclues; car elles appartiennent à la mécanique, et elles y désignent tout autre chose que $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{v}$, et même que les changements de grandeur de ces quantités. Je l'ai fait remarquer dans d'autres occasions (*) : une verge courbe peut être contenue latéralement, de manière que son axe ne change pas de place quand on la fait tourner sur elle-même, en sorte qu'elle peut éprouver des torsions sans que les angles de ses plans osculateurs varient, et ses *fibres* peuvent être inégalement étendues ou contractées de manière qu'elle éprouve l'effet appelé *flexion*, sans que les tangentes à son axe changent d'inclinaison mutuelle.

» Il faut donc d'autres dénominations.

» **7**. Celle de *courbure* convient parfaitement à $\frac{1}{\rho}$.

» Mais celle de *seconde courbure*, pour $\frac{1}{v}$, est repoussée par plusieurs géomètres pour des raisons assez bonnes : elle n'a nul rapport avec l'expression *courbes à double courbure*, comme l'entendait Clairaut. Sa seule forme s'oppose à ce qu'elle puisse être regardée comme définitive; elle peut tromper, et faire chercher quelque chose qui n'existe pas.

» Je suis arrivé d'ailleurs, dans un problème, à un résultat singulier qui peut se reproduire dans d'autres cas; c'est une ligne droite, limite d'une suite d'hélices, et pour laquelle il faut supposer une grandeur *finie* à cette affection $\frac{1}{v}$, *arbitraire, en effet, et non nulle* pour la ligne droite en général. Si on l'appelait définitivement courbure, on serait en contradiction avec la définition des lignes courbes, car il faudrait quelquefois attribuer une *courbure* à une ligne droite. Cet inconvénient disparaîtra si l'on fait usage d'un mot scientifiquement nouveau, en supposant même que sa signification vulgaire soit analogue à celle de courbure.

» **8**. Je propose donc, pour $\frac{1}{v}$, le mot *cambrure*. Il se dit plus, comme on sait, des surfaces que des lignes, et même, étymologiquement, il se rapporte surtout aux surfaces formées en ployant un plan; en sorte qu'il convient

(*) *Comptes rendus*, séances des 30 octobre 1843 et 1er juillet 1844.

bien à cette affection des courbes non planes qu'elles empruntent à la surface *développable* formée de l'ensemble de leurs éléments prolongés. Il est expressif, sans équivoque ni contradiction; sa symétrie avec le mot *courbure*, et sa brièveté, compensent, dans le discours, la rudesse de prononciation qu'on lui reprochera peut-être.

» La ligne ρ sera, comme dans les courbes planes, le *rayon* de courbure. Celle v pourra être appelée de même le *rayon* de cambrure, car elle sert bien de rayon à certains cercles osculateurs de la surface en question et à la base circulaire d'un cône osculateur dont nous allons parler.

» Je ne donne pas d'extrait de la troisième partie; plusieurs résultats de calculs donnés à cette partie, sont cités ci-après.

QUATRIÈME PARTIE. — *Autres théorèmes et formules.*

» 9. *Angle de courbure et cambrures composées.* — Soit $\frac{ds}{r}$ le petit angle que font les directions des rayons de courbure en M, M'.

» Concevons trois éléments consécutifs MM', M'M'', M''M''', le plan des deux premiers et le plan des deux derniers. Du point M' menons trois droites, savoir: dans le premier plan, une perpendiculaire au premier élément; dans le second plan, une perpendiculaire au second élément; enfin, dans le premier plan, une perpendiculaire au second élément. Si ces droites ont des longueurs égales à l'unité, leurs extrémités forment un triangle rectangle dont l'hypoténuse, comprise entre les deux premières, est $\frac{ds}{r}$, et les deux côtés de l'angle droit sont $\frac{ds}{\rho}$, $\frac{ds}{v}$; donc

$$\frac{ds^2}{r^2} = \frac{ds^2}{\rho^2} + \frac{ds^2}{v^2}.$$

» 10. *Cône osculateur.* — Le cône oblique, ayant pour sommet un point de la courbe donnée, pour apothême une longueur ρ de la tangente, et pour base perpendiculaire à l'apothême un cercle d'un rayon v, tangent au plan osculateur, est osculateur lui-même de la courbe et de la surface de ses tangentes.

» 11. *Droites rectifiantes.* — L'axe de ce cône est une de ces droites, perpendiculaires à la fois aux directions de deux rayons de courbure, qui constituent les génératrices de la surface *rectifiante* de Lancret. On a, pour l'angle H que cette droite fait avec la tangente en M,

$$\operatorname{tang} H = \frac{v}{\rho}.$$

» Et si X'_s, Y'_s, Z'_s représentent les binômes $d\frac{dy}{ds}\,d^2\frac{dz}{ds} - d\frac{dz}{ds}\,d^2\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}\,d^2\frac{dx}{ds} - d\frac{dx}{ds}\,d^2\frac{dz}{ds}$, $d\frac{dx}{ds}\,d^2\frac{dy}{ds} - d\frac{dy}{ds}\,d^2\frac{dx}{ds}$, on a, pour les cosinus de ses angles avec les x, y, z,

$$\frac{\rho^2 r X}{ds^3}, \quad \frac{\rho^2 r Y'_s}{ds^3}, \quad \frac{\rho^2 r Z'_s}{ds^3}.$$

Comme on a

$$X'_s d^3\frac{dx}{ds} + Y'_s d^3\frac{dy}{ds} + Z'_s d^3\frac{dz}{ds} = \frac{ds^5}{\rho^5}\, d\frac{\rho}{v},$$

l'angle de deux droites rectifiantes consécutives est

$$\frac{v^2 d\frac{\rho}{r}}{\rho^2 + v^2} = -\,dH.$$

» **12**. *Arête de rebroussement de la surface rectifiante.* — ξ, η, ζ étant les coordonnées du point où ces deux droites vont se rencontrer à la distance

$$\pm\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{v^2}} \cdot \frac{ds}{d\frac{\rho}{v}} = \mp\frac{ds \sin H}{dH},$$

on a

$$\xi - x = -\frac{\rho^3 X'_s}{ds^2 d\frac{\rho}{v}}, \quad \eta - y = -\frac{\rho^3 Y'_s}{ds^2 d\frac{\rho}{v}}, \quad \zeta - z = -\frac{\rho^3 Z'_s}{ds^2 d\frac{\rho}{v}},$$

et l'élément de l'arête, répondant à ds, a pour longueur

$$\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{v^2}}\, d.\frac{ds}{d\frac{\rho}{v}}.$$

» **13**. *Surface gauche des rayons de courbure, et sa courbe de gorge ou de striction. Plus courte distance de deux rayons consécutifs.* — La petite perpendiculaire commune aux deux rayons, les rencontrant tous deux, et mesurant sa plus courte distance, a pour longueur

$$\frac{\rho\, ds}{\rho^2 + v^2} = ds \cos \mathrm{H};$$

elle partage le rayon ρ, à partir du point M, en deux segments proportionnels à v^2 et ρ^2.

» L'ensemble de ces points, où chaque rayon passe le plus près du suivant, forme la *courbe de gorge* de cette surface; chacun d'eux est un centre de courbure de la surface rectifiante. Cette courbe coupe le rayon sous un angle fini dont la cotangente est $\frac{d.\rho \sin^2 \mathrm{H}}{ds \cos \mathrm{H}}$.

» **14.** *Surface gauche des normales aux plans osculateurs menées par les points de la courbe donnée.* — Elle a pour gorge la courbe donnée même. C'est une surface réglée d'un genre en quelque sorte opposé aux surfaces développables; car, dans celles-ci, les angles de la courbe de gorge et des génératrices sont tous nuls.

» **15.** *Sphère osculatrice.* — Soient R le rayon, et ξ, η, ζ les coordonnées du centre de la sphère qui a un contact du troisième ordre, avec la courbe donnée au point (x, y, z), on a

$$\xi - x = -\frac{\rho^2 v}{ds}\, d.\frac{\mathrm{X}}{ds^3} = \rho\,\frac{\rho d \frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{v\, d\rho}{ds}.\frac{\rho \mathrm{X}}{ds^3}, \quad \eta - y = \ldots, \quad \zeta - z = \ldots,$$

et

$$\mathrm{R} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{v\, d\rho}{ds}\right)^2}.$$

En sorte qu'on a le centre de cette sphère en portant sur la droite polaire, à partir du centre de courbure, une longueur $\frac{v d\rho}{ds}$.

» **16.** *Lieu des centres des sphères osculatrices.* — L'élément de cette courbe a pour longueur correspondante à celle ds de l'élément de la courbe donnée, $\frac{\rho}{v}\, ds + d\,\frac{v d\rho}{ds}$.

» En sorte que ses rayons de courbure et de cambrure sont

$$\rho + \frac{v}{ds}\, d\,\frac{v d\rho}{ds}, \quad \frac{\rho^2}{v} + \frac{\rho}{ds}\, d\,\frac{v d\rho}{ds}.$$

Et il n'est pas exact de dire qu'il y a *réciprocité* entre les deux affections de cette courbe et celles de la courbe donnée. M. Transon en avait fait la remarque.

» **17.** *Lieu des centres de courbure.* — La première partie $\frac{\rho}{v}ds$ de l'élément du lieu des centres des sphères représente la projection, sur la droite polaire, de l'élément du lieu des centres de courbure : la longueur de ce dernier élément est $\frac{\mathfrak{R}}{v}ds$. La tangente à cette même courbe fait, avec la droite polaire, un angle égal à celui que fait le rayon de courbure avec le rayon de la sphère osculatrice, et elle va couper le prolongement de ce dernier rayon sous un angle dont le complément est double de celui-là.

» **18.** *Démonstration géométrique de divers résultats de calcul.* — Si, d'un même point, on tire deux droites parallèles respectivement aux rayons de courbure en M et en M', et si l'on porte sur elles des longueurs $\frac{ds}{\rho}$, $\frac{ds}{\rho} + d\frac{ds}{\rho}$, le parallélogramme de ces deux droites aura une aire $\frac{ds^2}{\rho^2}\frac{ds}{r}$, et les trois projections de cette aire sur les plans coordonnés seront X'_s, Y'_s, Z'_s. Donc

$$X'^2_s + Y'^2_s + Z'^2_s = \frac{ds^6}{\rho^4 r^2} = \frac{ds^6}{\rho^4}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{v^2}\right).$$

Le carré de la diagonale fournit (comme au n° **2**) cette autre équation :

$$\left(d^2\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d^2\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d^2\frac{dz}{ds}\right)^2 = \left(d\frac{ds}{\rho}\right)^2 + \frac{ds^4}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{v^2}\right).$$

Et si l'on prolonge deux côtés, de manière à les rendre égaux à l'unité, on a, pour le carré de la petite ligne de jonction des extrémités,

$$\left(d\,\frac{\rho\, d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{\rho\, d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{\rho\, d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2 = ds^2\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{v^2}\right).$$

Le carré de la diagonale du parallélogramme infinitésimal du n° **3** donne, de même,

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \left(\frac{ds^4}{\rho^2 v}\right)^2 + \left(d\frac{ds^3}{\rho}\right)^2;$$

et si l'on en prolonge les côtés, de manière à les rendre égaux à l'unité, les projections, sur les trois axes, de la ligne de jonction des extrémités, donnent ces équations:

$$d\,\frac{\rho X}{ds^3} = -\frac{\rho}{v}\,d\,\frac{dx}{ds},\quad d\,\frac{\rho Y}{ds^3} = -\frac{\rho}{v}\,d\,\frac{dy}{ds},\quad d\,\frac{\rho Z}{ds^3} = -\frac{\rho}{v}\,d\,\frac{dz}{ds}.$$

Les projections, sur les axes, des trois côtés du petit triangle rectangle du n° **9** donnent

$$d\,\frac{\rho\, d\,\frac{dx}{ds}}{ds} = \frac{ds}{\rho}\,\frac{\rho X}{ds^3} - \frac{ds}{\rho}\,\frac{dx}{ds},\quad d\,\frac{\rho\, d\,\frac{dy}{ds}}{ds} = \ldots\ldots,\quad d\,\frac{\rho\, d\,\frac{dz}{ds}}{ds} = \ldots\ldots$$

Les trois faces de la pyramide triangulaire, dont ce petit triangle est la base, donnent, étant projetées sur les plans yz, zx, xy, donnent, en divisant par $\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{ds^2}$,

$$X'_s = \frac{1}{\rho^2}\left(X + \frac{dx\,ds^2}{v}\right),\quad Y'_s = \frac{1}{\rho^2}\left(Y + \frac{dy\,ds^2}{v}\right),\quad Z'_s = \frac{1}{\rho^2}\left(Z + \frac{dz\,ds^2}{v}\right).$$

Si l'on projette successivement la grande face sur chacune des deux autres, on obtient ces autres équations :

$$XX'_s + YY'_s + ZZ'_s = \frac{ds^6}{\rho^4},\quad X'_s\frac{dx}{ds} + Y'_s\frac{dy}{ds} + Z'_s\frac{dz}{ds} = \frac{ds^3}{\rho^2 v}.$$

En sorte que des considérations de projections fournissent l'interprétation géométrique d'une foule de formules relatives à la théorie des courbes dans l'espace. »

VOYAGES SCIENTIFIQUES. — *Observations de météorologie, de magnétisme terrestre, de physique du globe, etc., faites durant la campagne de l'Érigone; par* M. **Delamarche.**

(Commissaires, MM. Arago, Duperrey.)

Les importantes recherches de M. *Delamarche* devant être très-prochainement l'objet d'un Rapport, nous nous contentons de les annoncer ici.

A l'occasion de cette présentation, M. **Arago** rappelle qu'un des officiers qui ont le plus activement coopéré aux travaux scientifiques exécutés pendant la dernière campagne de *l'Astrolabe* et de *la Zélée*, M. **Coupvent-Desbois**, vient d'être grièvement blessé à l'attaque de Mogador. En raison de cette circonstance, et attendu que le Rapport sur l'ensemble des résultats