98.

LE FIGURE RECIPROCHE NELLA STATICA GRAFICA. [103]

Terza edizione, Milano, U. Hoepli, 1879. [104]

1.

È notissima la teoria delle figure reciproche nello spazio che emerge dalla considerazione di un sistema di forze applicate ad un corpo rigido e libero *). Per un punto qualunque M dello spazio passano infiniti assi, rispetto a ciascuno de' quali il momento del sistema è nullo; ed il luogo geometrico di tali assi è un piano μ, che MÖBIUS chiama *Nullebene* del punto M. Viceversa, un piano qualsivoglia μ contiene infiniti assi di momento nullo, i quali tutti concorrono in uno stesso punto M, detto da MÖBIUS il *Nullpunct* del piano μ. Invece di *Nullpunct* e di *Nullebene* io dirò *polo e piano polare*.

Per tal modo, ad ogni punto M dello spazio corrisponde un piano μ passante per M, e viceversa ad ogni piano μ corrisponde un punto M situato in μ. Se il polo M si muove in un dato piano α, il piano polare μ passa costantemente per un punto fisso A, che è

*) Ovvero dalle proprietà geometriche dello spostamento, infinitesimo o finito, di un corpo, o dalla teoria delle cubiche gobbe o da quella de' complessi di rette di 1.° grado, ecc. Veggansi:

GIORGINI, *Sopra alcune proprietà dei piani dei momenti principali e delle coppie di forze equivalenti.* (Memorie della Società Italiana, tomo XX, Modena, 1828).

MÖBIUS, *Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume* (CRELLE'S Journal für Mathematik, X Bd., Berlin, 1833 [ovvero, *Gesammelte Werke*, Leipzig, vol. I, p. 489, 1883]). — *Lehrbuch der Statik* (Leipzig, 1837), I Th. p. 144.

CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développément des méthodes en géometrie, etc.* (Bruxelles, 1827), p. 227, 413, 674-679, 684-686. — *Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide dans l'espace* (Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, t. XVI, Paris, 1843).

STAUDT, *Geometrie der Lage* (Nürnberg, 1847), p. 191.

JONQUIÈRES, *Mélanges de géométrie pure* (Paris, 1856), p. 1-31.

REYE, *Die Geometrie der Lage* [Dritte Auflage (Leipzig, 1892), zweite Abth., p. 165].

il polo di α; e viceversa, il luogo dei poli di tutt'i piani passanti per un punto A è un piano α, polare di A.

Se il polo percorre una retta, il piano polare gira intorno ad un'altra retta. Due rette così fatte diconsi *conjugate o reciproche;* ciascuna di esse è ad un tempo il luogo dei poli de' piani passanti per l'altra e l'inviluppo de' piani polari de' punti dell'altra.

Si sa che il dato sistema può in infinite maniere essere ridotto a due forze; scelta ad arbitrio la linea d'azione di una di esse, la linea d'azione dell'altra riesce univocamente determinata, giacchè le due linee di azione devono essere rette conjugate.

2.

Ad un fascio di piani paralleli corrispondono come poli i punti di una retta di direzione determinata; vale a dire, ad una retta situata a distanza infinita è conjugata una retta il cui punto I all'infinito è il polo del piano all'infinito. A tutt'i fasci di piani paralleli corrispondono di tal guisa tutte le rette (fra loro parallele) passanti per I: fra queste ve n'è una, detta asse *centrale* del sistema, che è perpendicolare al corrispondente fascio di piani paralleli.

In altre parole: ogni retta parallela all'asse centrale ha la sua conjugata a distanza infinita; ogni piano parallelo all'asse centrale ha il suo polo all'infinito.

3.

A due rette conjugate qualisivogliano compete la seguente proprietà: la loro minima distanza è una retta che sega ortogonalmente l'asse centrale. Donde segue che, *se si projettano le due rette reciproche parallelamente all'asse centrale e sopra un piano perpendicolare al detto asse, le due projezioni saranno rette parallele.*

4.

Facilmente si riconosce che:

1.° a più rette r dello spazio, le cui projezioni coincidano in una sola retta, corrispondono rette r', le cui projezioni sono coincidenti o parallele, secondochè le r (necessariamente contenute in un piano parallelo all'asse centrale) siano o non siano parallele;

2.° a più rette r dello spazio, le cui projezioni siano parallele, corrispondono rette r', le cui projezioni sono coincidenti o parallele, secondochè le r (necessariamente parallele ad uno stesso piano per l'asse centrale) sono parallele o no.

5.

Suppongo orizzontale l'asse centrale, e denomino *ortografico* il piano di projezione, che incontrerà l'asse centrale nel proprio polo. Posta in questo punto l'origine degli assi

delle coordinate rettangolari x, y, z, l'ultimo dei quali coincida coll'asse centrale, la suesposta legge di corrispondenza reciproca sarà espressa dalle seguenti formole. Il punto $x_1\ y_1\ z_1$ è il polo del piano

$$x\,y_1 - y\,x_1 + k\,(z - z_1) = 0,$$

dove k è una costante. Viceversa, al piano

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$$

corrisponde il polo

$$x = -\frac{k\,b}{c},\ y = \frac{k\,a}{c},\ z = -\frac{d}{c}.$$

E la retta

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c &= 0 \\ p\,x + q\,y + r\,z &= 0 \end{aligned}$$

è conjugata all'altra retta

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c' &= 0 \\ p\,x + q\,y + r'z &= 0, \end{aligned}$$

dove

$$r\,c' = r'\,c = k\,(a\,q - b\,p).$$

6.

Dirò *reciproci* due poliedri, se i vertici del primo sono i poli delle facce del secondo, così che anche le facce del primo saranno porzioni dei piani polari de' vertici del secondo, e gli spigoli dell'uno saranno ordinatamente conjugati agli spigoli dell'altro.

Siccome ogni polo giace nel rispettivo piano polare, così ciascuno de' due poliedri reciproci è simultaneamente inscritto e circoscritto all'altro. Per es. siano A B C D i vertici di un tetraedro, $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ le facce del tetraedro reciproco; i piani α, β, γ, δ passano pei rispettivi poli A, B, C, D: ed i vertici $\beta\gamma\delta$, $\gamma\alpha\delta$, $\alpha\beta\delta$, $\alpha\beta\gamma$ giacciono ne' rispettivi piani polari BCD, CAD, ABD, ABC *).

Projettinsi ora i due poliedri sul piano ortografico; le projezioni saranno due figure dotate di proprietà reciproche. Ad ogni lato della prima figura corrisponderà un lato parallelo della seconda, due lati corrispondenti essendo le projezioni di spigoli conjugati de' due poliedri. Se l'un poliedro ha un angolo solido, nel cui vertice concorrano m spigoli,

*) Möbius, *Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und eingeschrieben zugleich sein?* (Crelle's Journal, III Bd., 1828 [ovvero, *Gesammelte Werke* vol., I, p. 439]). — *Lehrbuch der Statik*, 1 Th., p. 156-158. — *Ueber eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume* (Crelle's Journal, X Bd., p. 324 e seg.).

l'altro avrà una faccia poligonale di m lati; epperò, considerando le due figure ortografiche, se nell'una vi sono m lati divergenti da un punto o *nodo*, gli m lati corrispondenti nell'altra saranno i lati di un poligono chiuso.

In un poliedro, ogni spigolo è comune a due facce e unisce due vertici; ogni faccia ha almeno tre spigoli, ed anche in ogni vertice concorrono almeno tre spigoli; dunque in ciascuna delle due figure ortografiche, ogni lato sarà comune a due poligoni e congiungerà due nodi, in ogni nodo concorreranno almeno tre lati, come ogni poligono avrà tre o più lati.

Supposto che l'un poliedro, epperò anche l'altro, sia *semplicemente connesso* *), la somma dei numeri de' vertici e delle facce supererà di 2 il numero degli spigoli, secondo il notissimo teorema di EULERO. Dunque, se la prima figura ortografica ha p nodi, p' poligoni ed s rette, sarà

$$p + p' = s + 2.$$

La seconda figura avrà p' nodi, p poligoni ed s rette.

7.

Se l'un poliedro ha un vertice all'infinito, all'altro spetta una faccia perpendicolare al piano ortografico, e viceversa; cioè, se una delle due figure ortografiche ha un vertice all'infinito, l'altra contiene un poligono, tutt'i lati del quale cadono in una stessa retta: e viceversa.

Se pel primo poliedro, il punto I all'infinito dell'asse centrale è il vertice comune ad n facce, l'altro poliedro avrà nel piano all'infinito una faccia poligonale di n lati. In questo caso, la prima figura ortografica ha $p - 1$ nodi, $p' - n$ poligoni ed $s - n$ rette; e la seconda (prescindendo dalla retta all'infinito) ha $p - 1$ poligoni, $p - n$ nodi ed $s - n$ rette: dove i numeri p, p', s s'intendono ancora legati dalla relazione $p + p' = s + 2$.

8.

Questi *diagrammi reciproci*, che si ottengono come projezioni ortografiche di due poliedri reciproci, s'incontrano per via diretta nella *statica grafica*. La proprietà meccanica dei diagrammi reciproci è espressa dal seguente teorema, dovuto all'illustre prof. CLERK MAXWELL **):

« If forces represented in magnitude by the lines of a figure be made to act between the extremities of the corresponding lines of the reciprocal figure, then the points of the reciprocal figure will all be in equilibrium under the action of these forces ».

*) [TODHUNTER, *Spherical Trigonometry*, Chapter XIII, Polyhedra.]

**) *Philosophical Magazine*, aprile 1864, p. 258.

La verità del teorema si rende subito manifesta, osservando che le forze applicate ad un nodo qualunque del secondo diagramma sono parallele e proporzionali ai lati di un poligono chiuso nel primo diagramma. Il teorema è precipuamente utile, quando se ne fa applicazione alla determinazione grafica degli *sforzi interni nelle travature reticolari.*

9.

I primi germi di questa teoria si possono ricercare nelle proprietà del *poligono delle forze*, i cui lati rappresentino in grandezza e direzione un sistema di forze applicate ad un punto ed equilibrate; e nelle note costruzioni geometriche che dànno le tensioni dei lati di un poligono funicolare piano *). Ma chi ha iniziato l'applicazione alle travature reticolari è il prof. MACQUORN RANKINE, che all'art. 150 del suo eccellente *Manual of applied Mechanics* (1857) dimostrò il teorema;

« If lines radiating from a point be drawn parallel to the lines of resistance of the bars of a poligonal frame, then the sides of any polygon whose angles lie in those radiating lines will represent a system of forces, wich, being applied to the joints of the frame, will balance each other; each such force being applied to the joint between the bars whose lines of resistance are parallel to the pair of radiating lines that enclose the side of the polygon of forces, representing the force in question. Also, the lenghts of the radiating lines will represent the stresses along the bars to whose lines of resistance they are respectively parallel **) ».

Il medesimo sig. RANKINE pubblicò più tardi ***) un teorema analogo per le *polyhedral frames.*

10.

Però la teoria geometrica de' diagrammi reciproci si deve propriamente al prof. CLERK MAXWELL, il quale prima nel 1864 †) e poi di nuovo nel 1870 ††) ne diede la definizione generale e li dedusse dalla projezione di due poliedri reciproci. Se non che, i poliedri del ch. A. sono reciproci nel senso della *teoria delle figure polari reciproche di* PONCELET †*), *relative ad un certo paraboloide di rotazione* in modo che nelle projezioni (ortogonali e parallele all'asse) i lati corrispondenti non riescono paralleli, ma perpendicolari fra loro; ond'è

*) VARIGNON, *Nouvelle Mécanique ou Statique, dont le projet fut donné en* 1687, Paris, 1725.

**) Pag. 140 della sesta edizione (1872). Ben inteso che la travatura o *frame*, di cui parla qui l'A., è un semplice poligono.

***) *Philosophical Magazine*, febbraio 1864, p. 92.

†) *On reciprocal figures and diagrams of forces* (Phil. Magazine, aprile 1864, p. 250).

††) *On reciprocal figures, frames and diagrams of forces* (Transactions of the R. Society of Edimburgh, vol. XXVI, p. 1). Vedi anche una lettera di M. RANKINE nel giornale *the Engineer*, 16 febbraio 1872.

†*) O, se si vuole, di MONGE. Vedi CHASLES, *Aperçu historique*, p. 378.

che uno de' diagrammi dev'essere fatto rotare di 90.° nel proprio piano, affinchè assuma quella posizione che è richiesta dal problema statico. Invece, col metodo ch'io propongo qui, le projezioni ortografiche di due poliedri reciproci dànno senz'altro i diagrammi, quali si ottengono nella statica grafica.

11.

L'applicazione pratica del metodo delle figure reciproche è il soggetto di una Memoria che il prof. FLEEMING JENKIN comunicò nel marzo 1869 alla Società reale di Edimburgo *); nella quale l'A., dopo aver citata la definizione delle figure reciproche, e la proprietà statica, come la enuncia MAXWELL nel suo lavoro del 1864, aggiunge:

« Few engineers would, however, suspect that the two paragraphs quoted put at their disposal a remarkably simple and accurate method of calculating the stresses in framework; and the author's attention was drawn to the method chiefly by the circumstance that it was independently discovered by a practical draughtsmann, Mr. TAYLOR, working in the office of the well-known contractor, Mr. J. B. COCHRANE ».

L'A. presenta un buon numero di esempi illustrati con figure, e finisce coll'osservare:

« When compared with algebraic methods, the simplicity and rapidity of execution of the graphic method is very striking: and algebraic methods applied to frames, such as the Warren girders, in wich there are numerous similar pieces, are found to result in frequent clerical errors, owing to the cumbrous notation wich is necessary, and especially owing to the necessary distinction between odd and even diagonals ».

12.

Ma quando si parla di risoluzioni geometriche de' problemi della scienza delle costruzioni, non si può certamente tacere del prof. CULMANN, l'ingegnoso e benemerito creatore della statica grafica **), al quale è dovuto se i metodi spicci ed eleganti di questa

*) *On the practical application of reciprocal figures to the calculation of strains on framework* (Transactions of the R. Society of Edimburgh, vol. XXV, p. 441). Dello stesso A. veggasi anche *On braced arches and suspension bridges*, read before the R. Scottish Society of arts (Edimburgh 1870); e la Memoria *On the application of graphic methods to the determination of the efficiences of machinery* (Transactions of the R. Society of Edimburgh, vol. XXVIII, 1877, p. 1).

**) *Die graphische Statik*, Zurich, 1866. Nel 1875 è venuta in luce la 2.ª edizione del 1.° tomo con ricche aggiunte (cfr. la prefazione e i n. 81 82). Siccome quest'opera insigne non è esente da difficoltà gravi, specialmente per chi non è famigliarizzato colla geometria projettiva, così si è saviamente pensato di aiutare la diffusione di queste preziose dottrine per mezzo di trattati più elementari. Veggasi: K. von OTT, *Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik*, Prag, 1871 (3.ª edizione, 1874); — J. BAUSCHINGER, *Elemente der graphischen*

scienza, usciti dalla scuola di Zurigo, vengono ora insegnati in parecchi politecnici di Germania (e da ben cinque anni anche nell'Istituto tecnico superiore di Milano *)). Tutte le quistioni di statica teorica, come pur quelle che appartengono ai singoli rami delle pratiche applicazioni, sono risolute dal prof. CULMANN con uniforme e semplice procedimento, che in sostanza si riduce alla costruzione delle due figure ch'egli denomina *Kräftepolygon* e *Seilpolygon*. E benchè egli non le consideri come figure reciproche, nel senso della teoria di MAXWELL, tuttavia esse sono tali sostanzialmente; ed in particolare, le costruzioni geometriche che il CULMANN dà nel 5.° Abschnitt della sua Opera, consacrato ai sistemi reticolari (*das Fachwerk*), coincidono quasi sempre con quelle che si dedurrebbero dai metodi del MAXWELL medesimo. Anzi le costruzioni di CULMANN comprendono anche quei casi (non isfuggiti al geometra inglese), ne' quali i diagrammi reciproci non sono possibili.

13.

Prima di tutto voglio mettere in evidenza che il *Kräftepolygon* ed il *Seilpolygon* (poligono delle forze, poligono funicolare) di CULMANN si possono ridurre a diagrammi reciproci.

Date in un piano (che supporrò sempre essere il piano ortografico) n forze $P_1, P_2, \ldots, P_n$, che si facciano equilibrio, per *poligono delle forze* s'intende un poligono i cui lati $1, 2, \ldots, n$ siano *equipollenti* **) alle rette che rappresentano quelle forze ***). Preso un punto O (nello stesso piano), che dirò *polo* del poligono tracciato, si projettino da esso i vertici del poligono medesimo; e si denomini $(r\ s)$ il raggio che projetta il vertice comune ai lati r, s. Ora per *poligono funicolare*, corrispondente al polo O, s'intende un altro poligono i cui

Statik, München, 1871; — ed il 2.° Abschnitt dell'opera di F. REAULEAUX, *Der Constructeur* (3.ª edizione), Braunschweig, 1869; — L. KLASEN, *Graphische Ermittelung der Spannungen in den Hochbau-und Brückenbau-Construction;* Leipzig, 1878; — G. HERMANN, *Zur graphischen Statik der Maschinengetriebe;* Braunschweig, 1879; — G. SIDENAM CLARKE, *The principles of graphic Statics;* London, 1880; — J. B. CHALMERS, *Graphical determination of forces in engineering structures;* London, 1881; — K. STELZEL, *Grundzuge der graphischen Statik und deren Anwendung auf den continuirlichen Träger; Graz*, 1882; M. MAURER, *Statique graphique appliquée aux constructions;* Paris, 1882); oltre a parecchie Memorie meno estese e riguardanti argomenti speciali, dei signori MOHR, HARLACHER, W. RITTER, E. WINKLER, ecc. Che in Inghilterra, oltre agli autori già citati, altri matematici abbiano portata la loro attenzione sulla statica grafica risulta dai *Proceedings* of the London Mathematical Society, vol. III, pp. 233, 320-322. Veggasi inoltre: C. UNWIN, *Wrought iron bridges and roofs;* London, 1869. — Per le pubblicazioni posteriori veggasi la nota in fine.

*) Questo fu scritto nel 1872. Ora si può aggiungere « ed in tutte le scuole italiane per gli Ingegneri ».

**) Uguali in grandezza, direzione e senso; denominazione che prendo dal prof. BELLAVITIS.

***) Nel costruire questo poligono, la posizione del primo vertice è arbitraria.

vertici cadano nelle linee d'azione (che denominerò 1, 2, ..., n) delle forze $P_1, P_2, \ldots, P_n$, ed i cui lati siano rispettivamente paralleli ai raggi per O *): in modo che il lato compreso fra le linee d'azione di P_r, P_s, sia parallelo al raggio (rs), epperò esso medesimo sia indicato col simbolo $(r\ s)$.

Il poligono funicolare risulterà chiuso, al pari del poligono delle forze.

14.

Se le linee d'azione delle forze date, fossero concorrenti in uno stesso punto (fig. 1.ª), si avrebbero già così due diagrammi reciproci: che evidentemente sarebbero le projezioni ortografiche di due piramidi n-edre.

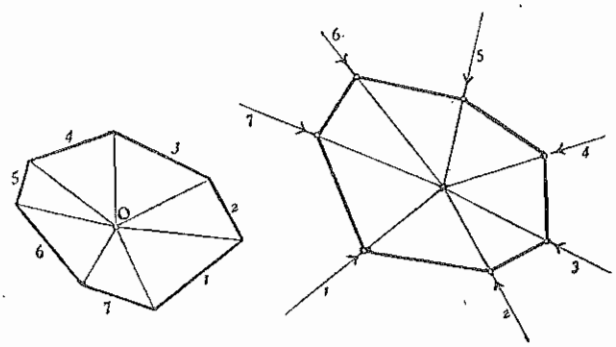

Fig. 1.ª

Se le forze sono parallele, il poligono delle forze si ridurrà ad una retta, ossia la base della prima piramide sarà perpendicolare al piano ortografico; ed il vertice della seconda cadrà all'infinito; vale a dire, il secondo poliedro sarà un prisma avente una sola base a distanza finita. Questo caso è illustrato dalla fig. 2.ª, dove i lati del poligono delle forze sono indicati, non già da un solo numero 1, 2, 3, ..., ma da due numeri posti ai termini di ciascun segmento; così che i segmenti 0 1, 1 2, 2 3, 3 4, ... corrispondono alle rette 1, 2, 3, 4, ... del secondo diagramma.

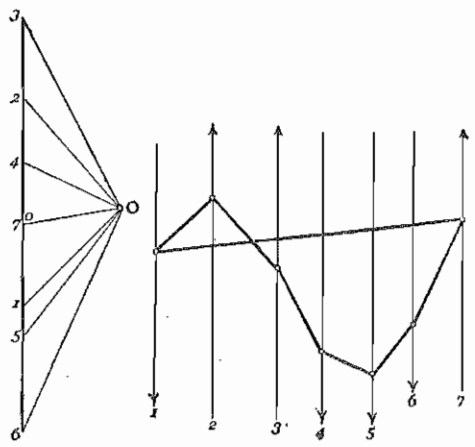

Fig. 2.ª

Qui, come in seguito, si adoperano *nel testo* due serie di numeri 1, 2, 3, ..., r, ..., s, ..., 1, 2, 3, ..., r, ..., s, ..., per distinguere le linee di un diagramma dalle corrispondenti dell'altro.

*) Nella costruzione di questo poligono, il primo lato è dato soltanto in direzione.

15.

Consideriamo ora il caso generale, che le forze non concorrano in uno stesso punto. Assumasi un secondo polo O', si congiunga ai vertici del poligono delle forze mediante rette, e costruiscasi un secondo poligono funicolare, corrispondente al polo O'; cioè un poligono, i cui vertici cadano sulle linee d'azione delle forze, ed i cui lati siano risp. paralleli ai raggi uscenti da O'. Vedi le fig. 3.ª e 5.ª, nelle quali i raggi uscenti dal secondo polo, come pure il corrispondente poligono funicolare, sono segnati a tratti non continui.

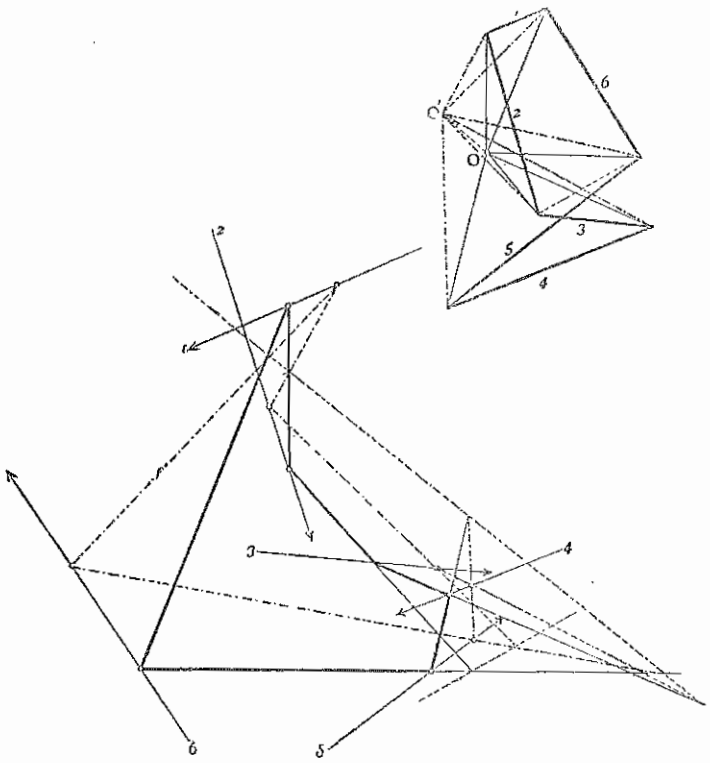

Fig. 3.ª

Per tal modo il diagramma costituito dal poligono delle forze e dei raggi projettanti per O e per O', ed il diagramma costituito dai due poligoni funicolari e dalle linee d'azione delle forze sono manifestamente reciproci. Il primo è la projezione di un poliedro *) for-

*) Questo poliedro ha $3n$ spigoli, $2n$ facce triangolari, 2 angoli n-edri ed n angoli 4-edri. L'altro poliedro ha $3n$ spigoli, $2n$ angoli triedri, 2 basi che sono poligoni di n lati, ed n facce quadrilatere.

mato da due angoli solidi n-edri le cui facce corrispondenti si seghino lungo il contorno di un poligono gobbo *) di n lati; il secondo è la projezione di un poliedro compreso fra due poligoni piani di n lati, tali che i lati dell'uno incontrino ordinatamente i lati corrispondenti dell'altro.

La retta che nello spazio congiunge i vertici de' due angoli n-edri del primo poliedro è la conjugata di quella che è comune ai piani delle due basi del secondo poliedro. Donde segue, attesa la proprietà che due rette conjugate hanno di projettarsi ortograficamente in due rette parallele, che due lati corrispondenti qualunque $(r\ s)$, $(r\ s)'$ de' due poligoni funicolari si segano sopra una retta fissa, che è parallela alla congiungente de' due poli O, O'. Questo teorema è fondamentale pei metodi del CULMANN.

16.

Se i poli O, O' si fanno coincidere, i lati corrispondenti de' due poligoni funicolari saranno paralleli (fig. 4.ª). In tal caso, la retta che congiunge i vertici degli angoli n-edri

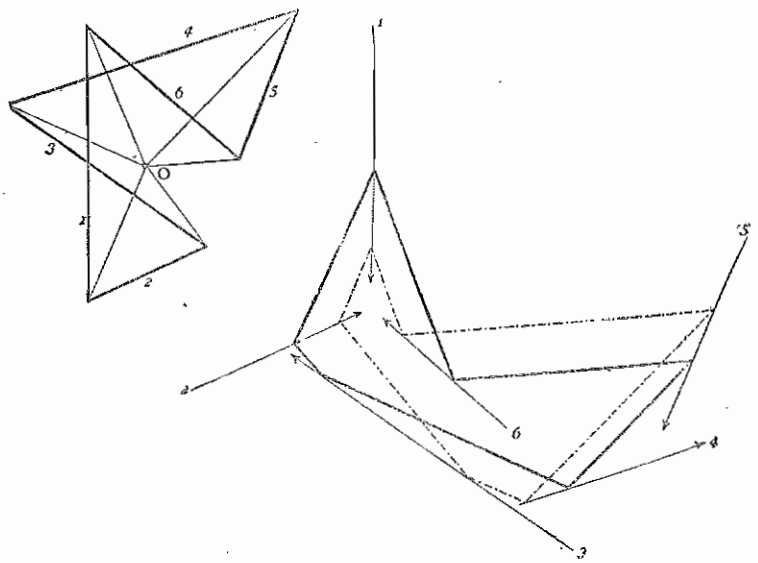

Fig. 4.ª

del primo poliedro è perpendicolare al piano ortografico; mentre le basi del secondo poliedro sono parallele.

*) | È evidente che, se questo poligono diviene una curva continua, il poligono delle forze e i poligoni funicolari diventano rispettivamente la curva delle forze, e le curve funicolari di un sistema continuo di forze in un piano. |

17.

La diagonale fra i vertici di due angoli tetraedri del primo poliedro (n.° 15), ossia la diagonale fra due vertici del poligono gobbo, è conjugata all'intersezione delle corrispondenti facce quadrilatere del secondo poliedro, la quale congiunge il punto comune a due lati di una base col punto comune ai lati corrispondenti dell'altra base. Nella projezione ortografica la prima retta dà una diagonale fra due vertici $(r \,.\, r+1)$, $(s \,.\, s+1)$ del poligono delle forze, ossia una retta equipollente alla risultante delle forze P_{r+1}, $P_{r+2}, \ldots, P_s$; la seconda retta darà la linea d'azione della risultante medesima. Dunque la linea d'azione della risultante di un numero qualunque di forze consecutive P_{r+1}, $P_{r+2}, \ldots, P_s$ passa pel punto comune ai lati $(r \,.\, r+1)$, $(s \,.\, s+1)$ del poligono funicolare: altro teorema fondamentale nella statica grafica. Veggasi per es. nella fig. 3.ª la risultante delle forze 6, 1, 2.

18.

Se l'accennata diagonale del primo poliedro è perpendicolare al piano ortografico, la

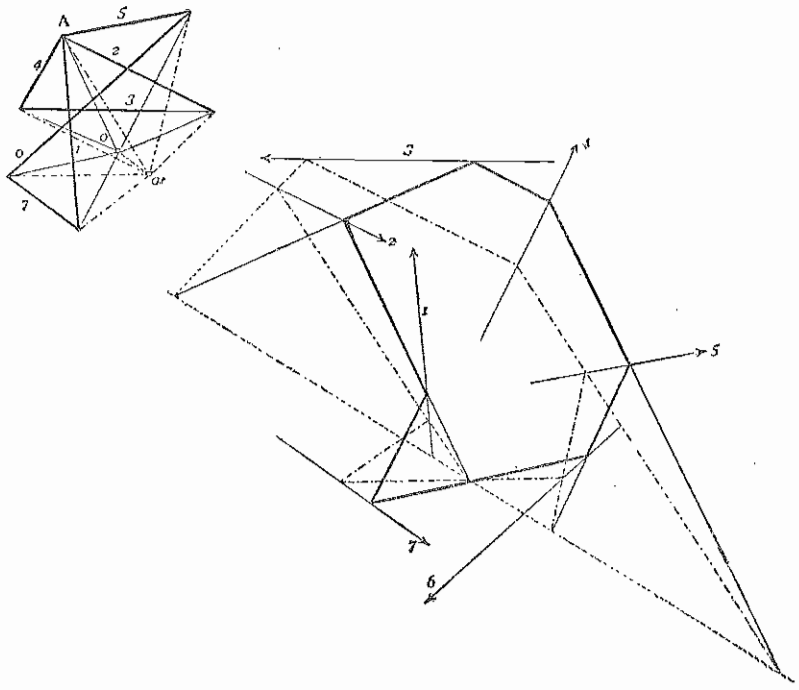

Fig. 5.ª

retta conjugata sarà all'infinito. Allora, nel poligono delle forze coincideranno i due vertici $(r \,.\, r+1)$, $(s \,.\, s+1)$ in un solo punto A (vedi fig. 5.ª, dove $r=1$, $s=4$), ed in

ciascuno de' poligoni funicolari saranno paralleli i lati $(r \,.\, r+1)$, $(s \,.\, s+1)$. La risultante delle forze $P_{r+1}, P_{r+2}, \ldots, P_s$ avrà dunque una grandezza evanescente e la sua linea d'azione cadrà nella retta all'infinito del piano ortografico: essa risultante sarà una forza infinitamente piccola e lontana, equivalente ad una coppia di forze agenti secondo i predetti lati paralleli del poligono funicolare e rappresentate in grandezza dalla retta che congiunge il corrispondente polo O al punto A. Siccome queste due forze equivalgono al sistema delle $P_{r+1}, P_{r+2}, \ldots, P_s$, così il senso di quella che agisce secondo il lato $(r \,.\, r+1)$ è da A verso O; e il senso dell'altra, agente secondo il lato $(s \,.\, s+1)$, è da O verso A.

19.

Date le forze $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$ (n.° 13), i due poligoni (delle forze e funicolare) servono a determinare la P_n, uguale ed opposta alla risultante delle date (vedi la fig. 3.ª, dove $n = 5$). Infatti, costruita la linea spezzata $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n-1$, i cui lati siano equipollenti alle forze date, la retta n che ne congiunge gli estremi (diretta dal termine all'origine della spezzata) sarà equipollente a P_n. Indi, assunto un polo O, costruiscasi un poligono (funicolare), i cui primi $n-1$ vertici $1, 2, 3, \ldots, n-1$ cadano nelle linee d'azione delle forze date $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}$, ed i cui lati $(n \,.\, 1), (1 \,.\, 2), (2 \,.\, 3), \ldots,$ $(n-1 \,.\, n)$ siano risp. paralleli ai raggi che da O projettano i vertici omonimi del primo poligono. Allora la retta che passa per l'ultimo vertice n del poligono funicolare, vale a dire pel punto di concorso del primo lato $(n \,.\, 1)$ coll'ultimo $(n-1 \,.\, n)$, ed è parallela all'ultimo lato n del poligono delle forze, sarà la linea d'azione di P_n.

Suppongo che il primo lato del poligono funicolare debba passare per un punto fisso, e si faccia muovere il polo O in linea retta; anche gli altri lati ruoteranno intorno ad altrettanti punti fissi, allineati col primo in una retta parallela al luogo del polo (n.° 15). Ciò rientra nel celebre porisma di PAPPO:

> « Si quotcumque rectæ lineæ sese mutuo secent, non plures quam duæ per idem punctum, omnia autem in una ipsarum data sint, et reliquorum multitudinem habentium triangulum numerum, hujus latus singula habet puncta tangentia rectam lineam positione datam, quorum trium non ad angulum existens trianguli spacii unumquodque reliquum punctum rectam lineam positione datam tangent *) ».

20.

Se consideriamo il punto O come suscettibile di prendere una posizione qualsivoglia

*) *Mathematicæ Collectiones*, prefazione al libro VII, p. 162 dell'edizione di COMMANDINO (Venetiis, 1589). Veggasi la traduzione o parafrasi del porisma, fatta da PONCELET al n.° 498 del suo *Traité des propriétés projectives* (Paris, 1822).

nel piano, le proprietà dei due poligoni (delle forze e funicolare) si possono compendiare nel seguente enunciato geometrico:

> Sia dato un poligono piano di n lati 1, 2, 3, ..., $n-1$, n; e nello stesso piano siano inoltre date $n-1$ rette 1, 2, 3, ..., $n-1$ risp. parallele ai primi $n-1$ lati del poligono. Da un punto o polo, mobile nel piano (senz'alcuna restrizione), s'intendano projettati i vertici del poligono dato. Ora si imagini un poligono variabile di n lati, i primi $n-1$ vertici del quale 1, 2, 3, ..., $n-1$ debbano trovarsi ordinatamente nelle rette date omonime, mentre gli n lati $(n\,.\,1)$, $(1\,.\,2)$, $(2\,.\,3)$, ..., $(n-1\,.\,n)$ debbano essere paralleli ai raggi che dal polo projettano i vertici omonimi del poligono dato. Il punto di concorso di due lati qualsivogliano $(r\,.\,r+1)$, $(s\,.\,s+1)$ del poligono variabile cadrà in una retta determinata, parallela alla diagonale fra i vertici $(r\,.\,r+1)$, $(s\,.\,s+1)$ del poligono dato.

Questo teorema la cui dimostrazione per mezzo della sola *geometria piana* non pare ovvia, risulta invece a dirittura evidente, se si considerano le figure piane come projezioni ortografiche di poliedri reciproci.

21.

Il poligono delle forze è la proiezione di un poligono piano o di un poligono storto, secondochè le forze P siano o non siano concorrenti in un punto. Come s'è veduto al n.° 14, nel primo caso i due diagrammi reciproci sono semplicemente costituiti l'uno dal poligono delle forze e dal polo O, l'altro dalle linee d'azione delle forze e dal poligono funicolare corrispondente ad O. Invece nel secondo caso (n. 15) è d'uopo aggiungere al primo diagramma un altro polo O', ed al secondo un altro poligono funicolare corrispondente ad O'. Si è pur veduto (n.° 16) che i due poli si possono assumere coincidenti, e allora il primo diagramma riesce il più semplice possibile. Ma se invece si volesse semplificare il secondo, gioverebbe portare il polo O' a distanza infinita, in una direzione arbitraria; il poliedro la cui projezione ortografica è il primo diagramma, avrebbe all'infinito il vertice di uno de' suoi angoli n-edri; e siccome il piano polare di un punto all'infinito è parallelo all'asse centrale, così il nuovo poligono funicolare, corrispondente ad O', avrebbe tutti i suoi lati distesi in una stessa linea retta (il cui punto all'infinito è O'). La posizione assoluta di questa retta nel piano ortografico è ancora arbitraria, epperò si potrebbe portarla a distanza infinita.

Si ha un risultato ancor più semplice nel modo seguente. Suppongasi che il primo poliedro abbia il vertice dell'anzidetto suo angolo n-edro nel punto all'infinito dell'asse centrale; nel primo diagramma scompare allora assolutamente il polo O, giacchè gli spi-

goli di quell'angolo n-edro si projettano ortograficamente nei vertici del poligono delle forze. Il piano polare del vertice è ora il piano all'infinito; dunque il secondo poligono funicolare cadrà tutto a distanza infinita (cfr. n.° 7).

22.

Concludo da ciò l'aspetto più semplice, sotto il quale si possono riguardare come diagrammi reciproci il poligono delle forze e il poligono funicolare di un sistema di n forze equilibrate, situate in un piano (il piano ortografico), ma non concorrenti in uno stesso punto. L'un diagramma sia costituito dal poligono delle forze e dai raggi che ne projettano i vertici da un polo O; l'altro dalle linee d'azione delle forze, dal poligono funicolare e dalla retta all'infinito. Il primo diagramma è la projezione d'un poliedro le cui facce si ottengono col projettare gli n lati d'un poligono gobbo sì perpendicolarmente al piano ortografico, sì da un punto dello spazio a distanza finita. Il poliedro reciproco, la cui projezione è il secondo diagramma, è la porzione (infinita) di spazio contenuta da un poligono piano e da n piani passanti ordinatamente pei lati del medesimo ed estesi sino al piano all'infinito.

23.

Passo ora a diagrammi più complicati, quali si presentano nella teoria delle travature reticolari *). Siano $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$ due superficie poliedriche reciproche, {che posseggono un orlo o contorno, che sono semplicemente connesse, e i cui contorni sono due poligoni chiusi sghembi} **); $\mathfrak{p}$ il poliedro formato da $\mathfrak{s}$ e dalla superficie piramidale, il cui vertice sia un punto o fissato ad arbitrio nello spazio, e la cui linea direttrice sia il contorno poligonale di $\mathfrak{s}$; e $\mathfrak{p}'$ il poliedro reciproco di $\mathfrak{p}$, ossia il poliedro contenuto dalle facce di $\mathfrak{s}'$, dai piani degli angoli dell'orlo di $\mathfrak{s}'$ e dal piano ω polare di o. Projettando ortografica-

*) {Dicesi *travatura reticolare* un sistema piano di aste rettilinee riunite agli estremi per nodi o articolazioni. Sia AB un'asta qualunque (il cui peso è trascurato) di una tale travatura; e supponiamo che nessuna forza agisca sopra di essa, fuorchè ai nodi A, B. Allora l'insieme delle forze che agiscono su di essa nel nodo A (alcune esterne, alcune consistenti in pressioni esercitate sull'asta medesima da quella o da quelle che l'incontrano nel nodo A) possono essere ridotte ad una sola risultante: lo stesso per quelle che agiscono al nodo B; e queste risultanti, essendo necessariamente eguali ad opposte, debbono agire secondo l'asta AB. Quindi l'asta è in un semplice stato di *tensione* quando queste risultanti agiscono all'infuori, o di *compressione* quando agiscono verso l'interno. Un'asta è chiamata *un tirante* quando è in tensione, *un puntone* quando è in compressione (CROFTON, *Lectures on Applied Mechanics, at the Royal Military Academy*, London, 1877)}. [cfr. n. 31].

**) Se l'orlo di $\mathfrak{s}$ è un poligono piano di n lati, quello di $\mathfrak{s}'$ sarà un punto, vertice di un angolo n-edro.

mente i due poliedri, si avranno i due diagrammi reciproci, che qui si vogliono prendere in considerazione.

L'orlo di $\mathfrak{s}$ sia di n lati, e questa superficie abbia altri m spigoli *) e p facce. Il poliedro $\mathfrak{p}$ avrà $n+p$ facce e $2n+m$ spigoli, epperò $m+n-p+2$ vertici. Dunque $\mathfrak{s}$ ha, fuori dell'orlo, $m-p+1$ vertici **).

Reciprocamente $\mathfrak{p}'$ avrà $m+n-p+2$ facce, $n+p$ vertici e $2n+m$ spigoli.

24.

Suppongo ora che la projezione di $\mathfrak{s}'$ sia lo schema di una travatura reticolare dotata di p nodi e di m membri o pezzi rettilinei, per la quale le forze esterne abbiano a linee di azione le projezioni degli spigoli all'orlo di $\mathfrak{s}'$, e siano rappresentate in grandezza dagli n lati del poligono che è projezione dell'orlo di $\mathfrak{s}$ ***). Allora la projezione di quella faccia di $\mathfrak{s}'$ che è nel piano ω sarà il poligono funicolare delle forze esterne, corrispondente al polo O, projezione di $\mathfrak{o}$; e le projezioni degli m spigoli di $\mathfrak{s}$, non appartenenti all'orlo, daranno le misure degli sforzi interni, ai quali sono soggetti i membri corrispondenti della travatura, in conseguenza del dato sistema di forze esterne.

25.

Se il punto $\mathfrak{o}$ si allontana all'infinito nella direzione perpendicolare al piano ortografico, il piano ω coinciderà col piano all'infinito. Allora il primo diagramma si ridurrà alla projezione di $\mathfrak{s}$, cioè all'insieme delle rette che misurano le forze esterne e gli sforzi interni; ed il secondo diagramma, scomparendone affatto il poligono funicolare, conterrà soltanto lo schema della travatura (cioè le linee d'azione delle forze interne) e le linee d'azione delle forze esterne. Nelle figure che accompagnano questo scritto, il primo diagramma è indicato colla lettera **b**, il secondo colla lettera **a**.

26.

Se le forze esterne sono tutte parallele fra loro, come avviene assai di frequente nelle applicazioni pratiche, l'orlo di $\mathfrak{s}$ sarà un poligono tutto contenuto in un piano perpendicolare all'ortografico; epperò i lati del poligono delle forze esterne cadranno tutti in una sola e medesima retta.

---

*) Evidentemente è $m \geqq n$.

**) Laonde m non può essere minore di $p-1$.

***) Perciò $\mathfrak{s}$ non dovrà avere alcun vertice a distanza infinita; vale a dire $\mathfrak{s}'$ non avrà alcuna faccia perpendicolare al piano ortografico.

27.

Altre forme poligonali degeneri possono offrire i diagrammi, le quali provengono da degenerazioni analoghe delle figure nello spazio.

Suppongasi per es. che nello spazio si abbia un angolo solido tetraedro, al quale corrisponderà nella figura reciproca una faccia quadrilatera; e che due spigoli (non opposti) dell'angolo solido accostandosi indefinitamente nel loro piano vengano a sovrapporsi l'uno all'altro; sicchè da ultimo l'angolo solido sarà ridotto al sistema composto di un triedro e di un piano passante per uno degli spigoli. Perciò anche nella faccia quadrilatera della figura reciproca vi saranno due lati che, senza cessare d'avere un vertice comune, verranno a trovarsi nella stessa direzione o in direzioni opposte.

Passando ora alle projezioni ortografiche, si avrà nell'un diagramma un punto donde divergono quattro rette, due delle quali con direzioni sovrapposte; e nell'altro diagramma un quadrilatero con tre vertici in linea retta *).

28.

Dato lo schema di una travatura reticolare, e supposto conosciuto il sistema delle forze esterne, bisognerà anzi tutto costruire il poligono di queste forze, vale a dire un poligono i cui lati siano equipollenti alle forze esterne. Nelle figure qui unite, le forze esterne e i lati del poligono sono indicati coi numeri 1, 2, 3, ... per modo che, percorrendo il contorno del poligono nell'ordine crescente de' numeri, ciascun lato sia percorso nel senso della forza, che esso rappresenta. Questo modo di percorrere il contorno del poligono si chiamerà *l'ordine ciclico del contorno* medesimo.

Quando si tratta di costruire il diagramma reciproco a quello che è costituito dallo schema della travatura e dal sistema delle forze esterne, non è arbitrario l'ordine col quale si fanno succedere queste forze l'una all'altra per costruire il relativo poligono. L'ordine di cui si tratta è determinato dalla considerazione che segue. Nel poligono delle forze esterne, che fa parte del diagramma b, devono essere successivi i lati equipollenti a due forze, se le linee d'azione di queste appartengono al contorno di uno stesso poligono nel diagramma a; giacchè questo poligono corrisponde al vertice che è comune a quei due lati.

Si darà dunque l'indice 1 ad una qualunque delle forze esterne; la linea d'azione della forza prescelta è lato comune a due poligoni del diagramma a; ciascuno di questi ha nel proprio contorno la linea d'azione d'un'altra forza esterna; si hanno così due forze esterne, che possono risguardarsi come *contigue* alla forza 1, e sarà indifferente di attribuire all'una o all'altra l'indice 2; naturalmente l'altra avrà allora l'indice n, se n è il nu-

*) Esempi di queste forme degenerate si possono vedere a pag. 444 e nelle prime due tavole della citata Memoria del prof. FLEEMING JENKIN (1869), ed anche nella 9.ª delle nostre figure.

mero delle forze esterne. Dopo di ciò, non rimane più alcun che d'arbitrario o d'incerto nell'ordine col quale si avranno a disporre i lati del poligono delle forze esterne.

Supposto che i nodi ai quali sono applicate le forze esterne si trovino tutti sul contorno dello schema della travatura *), queste forze si dovranno prendere nell'ordine col quale sono incontrate da chi percorra il contorno suddetto. Quando non si seguano queste regole e le altre esposte più innanzi, si può ancora risolvere il problema della determinazione grafica degli sforzi interni, ma non si hanno più *diagrammi reciproci*, bensì figure più complicate o sconnesse, dove uno stesso segmento, non trovandosi al suo posto *conveniente*, dev'essere ripetuto o riportato per dar luogo alle costruzioni ulteriori **), come accadeva nel vecchio metodo di costruire separatamente un poligono delle forze per ciascun nodo della travatura.

29.

Formato così il poligono delle forze esterne, si completerà il diagramma **b**, costruendo successivamente i poligoni che corrispondono ai nodi della travatura. Il problema di costruire un poligono, i cui lati devono avere direzioni date, è determinato ogni qualvolta siano incogniti due soli lati. Perciò si dovrà incominciare da un nodo nel quale concorrano tre sole rette; le linee di resistenza di due membri della travatura e la linea d'azione di una forza esterna. Il segmento equipollente a questa forza sarà un lato del triangolo corrispondente a quel nodo; perciò il triangolo può essere costruito. Nè in questa costruzione sussisterà alcuna ambiguità, se si ponga mente che ad un membro della travatura, il quale insieme colle linee d'azione di due forze esterne appartenga al contorno d'un poligono del diagramma **a**, corrisponde in **b** una retta passante pel vertice comune ai lati che sono equipollenti a quelle due forze.

Indi si passerà successivamente agli altri nodi, in modo che per ogni nuovo poligono da costruirsi rimangano due soli lati incogniti.

Nelle figure qui unite, si sono segnati con numeri tutte le linee di ciascun diagramma per indicare l'ordine delle operazioni.

« The figure can be drawn in five minutes, whereas the algebraic computation of the stresses, though offering no mathematical difficulty, is singularly apt, from mere complexity of notation, to result in error ***) ».

*) Il contorno della travatura è costituito dalle due così dette *tavole* (*Gurten*, *Streckbäume*), la tavola superiore e l'inferiore. I pezzi che congiungono i nodi dell'una a quelli dell'altra diconsi *aste* e *saette*.

**) Per questa ragione, non sono diagrammi reciproci le fig. 1 e 3 della tavola 16 nell'atlante della *Graphische Statik* di CULMANN, nè le fig. 7 e 7_1, della tavola 19, ecc. Invece sono perfettamente reciproci i diagrammi 168 e 169 a pag. 422 del testo, ecc.

***) Così il prof. FLEEMING JENKIN a pag. 443 del citato volume delle *Transactions* di Edimburgo.

30.

Una considerazione superficiale potrebbe far credere possibile e determinata la soluzione del problema anche in casi ne' quali nessun nodo sia il punto di concorso di tre sole rette *). Suppongasi per es. lo schema della travatura costituito dai lati 5, 6, 7, 8 di un quadrilatero e dalle rette 9, 10, 11, 12 che ne congiungono i vertici ad un quinto punto; e le forze esterne siano le 1, 2, 3, 4 applicate ai vertici (8 . 5 . 9), (5 . 6 . 10), (6 . 7 . 11), (7 . 8 . 12) del quadrilatero **). Formato il poligono 1 . 2 . 3 . 4 delle forze esterne, pei punti (1 . 2), (2 . 3), (3 . 4), (4 . 1) conducasi ordinatamente le 5, 6, 7, 8 indefinite; indi pongasi il problema di costruire un quadrilatero i cui lati 9, 10, 11, 12 siano risp. paralleli alle linee omonime del diagramma dato, e i cui vertici (9 . 10), (10 . 11), (11 . 12), (12 . 11) cadano risp. nelle 5, 6, 7, 8. Siccome il problema di costruire un quadrilatero i cui lati abbiano direzioni date (o passino per punti dati in una stessa retta) ed i cui vertici cadano in altrettante rette fisse, ammette in *generale* una ed una sola soluzione, così si potrebbe credere a primo aspetto che il diagramma delle forze riesca così perfettamente determinato.

Ma l'illusione svanisce, se si pon mente che il problema geometrico ha i suoi casi di impossibilità e di indeterminazione. Infatti, quando si ometta una delle condizioni proposte, vale a dire si assoggetti il quadrilatero soltanto ad avere i suoi lati nelle date direzioni, e i primi tre vertici sulle rette date 5, 6, 7, il quarto vertice descrive ***) una retta r; ed è il punto comune a questa ed alla retta data 8 che, preso come posizione del quarto vertice, dovrebbe dare la soluzione desiderata. Ora, se i dati della questione sono tali che r risulti parallela alla 8, ecco, ci troviamo in un caso d'impossibilità. Però, se, in un'ipotesi anche più speciale, la retta r coincidesse appunto colla 8, il problema riuscirebbe indeterminato, cioè, infiniti quadrilateri soddisferebbero alle condizioni proposte.

A persuaderci che, nella costruzione del diagramma reciproco al dato, si urta precisamente nell'impossibilità o nell'indeterminazione, basta riflettere che, ove si consideri il diagramma dato come un poligono di forze, le cui grandezze siano espresse dai segmenti 5, 6, 7, 8 e il cui polo sia il punto (9 . 10 . 11 . 12), la figura cercata 9 . 10 . 11 . 12 sarebbe il corrispondente poligono funicolare. Ora, affinchè sia possibile la costruzione del poligono funicolare, è necessario che le forze siano in equilibrio: al quale scopo, se si suppongono date le loro grandezze 5, 6, 7, 8, e le linee d'azione di tre fra esse, 5, 6, 7, la linea d'azione della quarta risulta univocamente determinata, ed è appunto quella retta r

*) [Supposta la travatura reticolare composta di triangoli come dapertutto in questo opuscolo].

**) Queste considerazioni sussistono inalterate, se la travatura sia invece costituita da un poligono qualunque e dalle rette che ne congiungano i vertici ad un punto fisso. Non do la figura relativa a questo paragrafo; ma il lettore potrà supplirvi senza difficoltà.

***) PONCELET, *Traité des propriétés projectives* (Paris 1822), n.° 500.

che sopra si è menzionata. Dunque, se r ed 8 non coincidono, le forze fittizie 5, 6, 7, 8 non sono in equilibrio, ma equivalgono ad una forza infinitamente piccola e distante, e il problema è impossibile. Se poi r coincide con 8, cioè se le forze fittizie sono equilibrate il problema è indeterminato, giacchè per un dato sistema di forze e per un dato polo, si possono costruire infiniti poligoni funicolari (n.° 16).

Nel primo di questi due casi si otterrebbe l'equilibrio, aggiungendo alle forze 5, 6, 7, 8 una forza uguale ed opposta alla loro risultante (infinitamente piccola e lontana), cioè considerando il poligono 5 . 6 . 7 . 8 come projezione, non già di un quadrangolo, ma di un pentagono, due vertici consecutivi del quale si projettino in uno stesso punto (7 . 8 . 12). Allora la retta 12 è la projezione di due rette distinte nello spazio, epperò, nel diagramma reciproco, al punto (9 . 10 . 11 . 12) corrisponderà un pentagono (aperto) 9 . 10 . 11 . 12 . 12′, avente i vertici (9 . 10), (10 . 11), (11 . 12), (12′ . 9) risp. situati nelle 5, 6, 7, 8, e il vertice (12 . 12′) all'infinito.

31.

Ogni membro o pezzo rettilineo della travatura è linea d'azione di due forze uguali ed opposte, applicate risp. ai due nodi che sono congiunti da quel pezzo. La grandezza comune di queste due forze, ossia la misura dello sforzo cui va soggetto il pezzo considerato, è data dalla retta corrispondente del diagramma b. Quelle due forze si possono considerare come *azioni* o come *reazioni:* per passare dall'un caso all'altro, basta rovesciarne i sensi. Considerandole come *azioni*, se esse agiscono dai rispettivi punti d'applicazione verso l'interno del pezzo, questo si dice *premuto* o *compresso*; se agiscono invece all'infuori, il pezzo dicesi *teso* o *stirato*. Spesse volte ai pezzi compressi si dà il nome di *puntoni*; ai pezzi tesi quello di *tiranti* *).

32.

Ciascun nodo della travatura è il punto d'applicazione di un sistema di forze equilibrate, almeno tre di numero; una di esse può essere una forza esterna; tutte le altre sono *reazioni* dei pezzi concorrenti in quel nodo. Basterà conoscere il senso di una delle forze del sistema, per dedurne il senso di tutte le altre; al quale uopo non si avrà che a percorrere il contorno del poligono corrispondente a quel nodo. Se al nodo è applicata una forza esterna, e si percorra nel senso della medesima il lato equipollente del poligono, ciascuno degli altri lati del contorno verrà percorso nel senso che spetta alla corrispondente forza interna riguardata come reazione applicata al nodo che si considera. Se invece le forze in-

*) Nelle figure in fondo a questo opuscolo i tiranti sono indicati con linee più sottili di quelle che rappresentano i puntoni. Nelle figure del CULMANN e del REULEAUX i puntoni sono segnati con linee doppie, i tiranti con linee semplici.

terne s'intendono agire nel senso che loro compete come *azioni*, nel percorrere il contorno del poligono bisognerà rovesciare il senso della forza esterna.

Se ad un nodo non è applicata alcuna forza esterna, ma sole forze interne, basterà del pari conoscere il senso di una fra esse, per ottenere, col procedimento ora esposto, il senso di ciascuna delle rimanenti.

Si dirà *ordine ciclico del contorno* di un poligono del diagramma $\mathfrak{d}$, quello che corrisponde alle forze interne considerate come *azioni*.

Per tal modo, incominciando da un nodo al quale sia applicata una forza esterna, si verranno a determinare successivamente le grandezze e i sensi di tutte le forze interne. Considerando una forza interna come *azione* applicata ad uno dei due nodi fra i quali essa agisce, si riconoscerà tosto se il pezzo limitato dai nodi medesimi sia compresso o teso.

Ogni retta nel diagramma $\mathfrak{d}$ è lato comune a due poligoni; percorrendo i contorni de' quali, nel loro ordine ciclico rispettivo, quel lato verrà descritto una volta in un senso l'altra volta nel senso opposto *). Ciò corrisponde all'essere quella retta la misura di due forze uguali opposte, agenti lungo il corrispondente membro della travatura.

33.

È noto che la somma algebrica delle proiezioni delle facce di un poliedro è uguale a zero. Applicando questo teorema al poliedro $\mathfrak{p}$ (n.° 23) ed osservando che la projezione della superficie $\mathfrak{s}$ è costituita dai poligoni del diagramma $\mathfrak{d}$ corrispondenti ai nodi della travatura, mentre la projezione della restante superficie di $\mathfrak{p}$ non è altro che il poligono delle forze esterne, si ottiene il risultato seguente:

Riguardata come positiva o negativa l'area di un poligono, secondo che essa giaccia a sinistra o a destra di chi ne percorra il contorno nell'ordine ciclico del medesimo, la somma delle aree dei poligoni del diagramma $\mathfrak{d}$ *che corrispondono ai nodi della travatura è uguale ed opposta all'area del poligono delle forze esterne.*

Il signor MAXWELL è giunto per altra via a questo teorema, dimostrandolo per una *frame* piana qualsivoglia, sia o non sia possibile di costruire un diagramma di forze **).

34.

Il *metodo delle sezioni*, generalmente adoperato nella trattazione de' sistemi variabili, offrirà al disegnatore un prezioso mezzo di verificazione.

---

*) Questa proprietà è in accordo colla così detta *legge degli spigoli* (*Kantengesetz*) nei poliedri dotati di una superficie interna e di una superficie esterna. Vedi MÖBIUS, *Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders* (nei *Berichte* della Società delle scienze di Lipsia, 1865, vol. 17, p. 33 e seg. ¦ovvero *Gesammelte Werke*, vol. II, p. 473¦ e BALTZER, *Stereometria* (p. 147 della traduzione italiana, 2.ª edizione, Genova, 1877).

**) Citata Memoria del 1870, p. 30.

Se si considera una delle parti nelle quali la travatura è divisa da una *sezione ideale*, le forze esterne applicate ad essa parte sono equilibrate dalle reazioni de' pezzi incontrati dalla sezione.

Se di queste reazioni tre sole sono incognite, esse potranno dedursi da quella condizione d'equilibrio, giacchè il problema di decomporre una forza P in tre componenti, le cui linee d'azione 1, 2, 3 siano date e formino con 0, linea d'azione di P, un quadrilatero (piano) completo, è determinato ed ammette una sola soluzione. Infatti (fig. 6.ª) basta condurre una delle diagonali del quadrilatero, per es. la retta 4 che unisce i punti 01, 23, decomporre la forza data 0 in due componenti secondo le rette 1, 4 (e ciò costruendo il triangolo delle forze 041, il lato 0 del quale è dato in grandezza e direzione) e da ultimo decomporre la forza 4 secondo le rette 2, 3 (costruendo analogamente il triangolo delle forze 432).

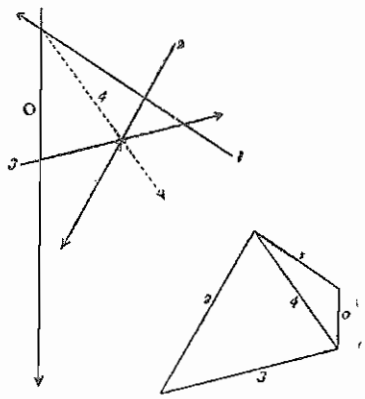

Fig. 6.ª

Questo metodo, che potrebbe dirsi *statico*, basta da sè solo alla determinazione grafica degli sforzi interni, al pari del metodo *geometrico*, esposto precedentemente, che si deduce dalla teoria delle figure reciproche e consiste nella costruzione successiva dei poligoni corrispondenti ai diversi nodi della travatura. Il metodo statico mi pare però meno semplice, e piuttosto può giovare in combinazione coll'altro, sopratutto per verificare l'esattezza delle operazioni grafiche, già eseguite. Le forze esterne applicate ad una porzione della travatura, staccata mediante una sezione qualsivoglia, e le reazioni dei pezzi segati devono aver la proprietà che le corrispondenti linee del diagramma **b** siano i lati di un poligono chiuso. Questo poligono dev'essere la projezione di un poligono gobbo, chiuso del pari, non già di una spezzata, i cui estremi siano in una retta perpendicolare al piano ortografico: la qual condizione equivale all'esser chiuso anche il poligono gobbo reciproco, ossia al potersi connettere le linee corrispondenti del diagramma **a** con un poligono funicolare chiuso.

Il metodo delle sezioni può anche essere presentato sotto un'altra forma. Indicando ancora con 0 la risultante di tutte quelle forze (applicate alla porzione di travatura) che sono conosciute, e con 1, 2, 3 le tre reazioni incognite, la somma dei momenti delle quattro forze sarà nulla. Donde segue che, posto il centro dei momenti nel punto d'incontro di due linee di resistenza, per es. nel punto 23, il momento della terza reazione 1 sarà uguale ed opposto al momento della forza 0. Si ha così una proporzione di quattro grandezze (le due forze e i loro bracci di leva), fra le quali la sola incognita è la grandezza della forza 1. In ciò consiste il *metodo dei momenti statici*, che s'adopera quando si vogliano

calcolare numericamente (non costruire graficamente) gli sforzi interni nelle travature reticolari *).

35.

Passo a dare alcuni esempi, atti a mettere in evidenza la semplicità e l'eleganza del metodo grafico. In questi esempi non mi curo sempre della regolarità o della simmetria di forma, sebbene in pratica non vi si rinunci quasi mai. *Ma le forme simmetriche della pratica non sono che un caso particolare delle forme irregolari della geometria astratta*: epperò la trattazione di queste include in sè tutti i casi pratici possibili. Qui adunque il vocabolo *travatura reticolare* è preso in quel senso generale e teorico che il signor MAXWELL dà alla parola *frame* **):

« A frame is a system of lines connecting a number af points. A stiff frame is one in which the distance between any two points cannot be altered without altering the lenght of one or more of the connecting lines of the frame.... A frame of s points in a plane requires in general $2s - 3$ connecting lines to render it stiff ».

Soltanto io intendo limitarmi alla considerazione di figure piane {e formate da triangoli}.

36.

Come primo esempio (teorico, generale) sia **1, 2, ..., 10** (fig. 7.ª a) un sistema di dieci forze (esterne) equilibrate, cosicchè, costruito il poligono di esse forze e projetta-

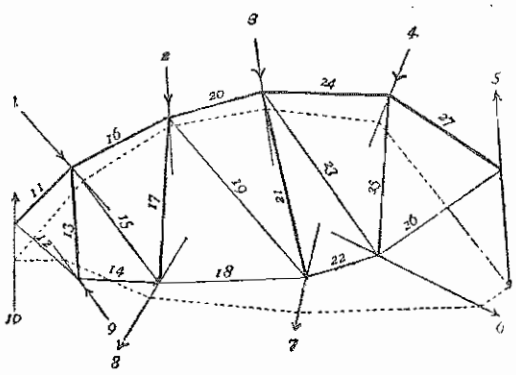

Fig. 7.ª *a*

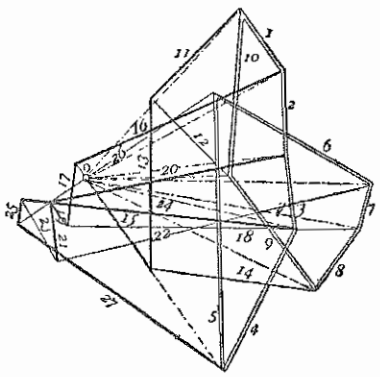

Fig. 7.ª *b*

tine i vertici da un polo O (fig. 7.ª b, dove il poligono delle forze è segnato con linee doppie), si potrà tracciare un poligono funicolare, i cui vertici siano nelle linee d'azione

*) Vedi A. RITTER, *Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach-und Brücken-Constructionen*, 2.ª ediz. (Hannover, 1870).

**) A pag. 294 del *Philosophical Magazine*, aprile 1864

1, **2**, ... , ed i cui lati (segnati a tratti nella fig. **a**) siano ordinatamente paralleli ai raggi (pur segnati a tratti nella fig. **b**) che escono da O. Le dette forze siano applicate ai nodi di una travatura reticolare, i cui membri rettilinei indicherò con **11**, **12**, **13**, ... , **27** (fig. **a**).

Comincio dal costruire il triangolo corrispondente al nodo (**10** . **11** . **12**), conducendo dai termini di 10 due rette 11, 12 risp. parallele ad **11**, **12**; al quale uopo osservo che 11 deve passare pel punto (1 . 10), perchè nel diagramma **a** le linee **1**, **10**, **11** appartengono al contorno di uno stesso poligono *); e per la identica ragione, 12 dee passare pel punto (9 . 10). Percorrendo il contorno del triangolo così ottenuto, nel senso contrario a quello della forza **10**, si ottengono i sensi delle azioni esercitate sul nodo che si considera, lungo le linee **11**, **12**; e si vede così che il pezzo **11** è compresso, mentre **12** è teso.

Costruisco il quadrilatero corrispondente al nodo cui è applicata la forza **9**, conducendo la 13 pel punto (11 . 12) e la 14 pel punto (8 . 9). Il pezzo **13** è compresso; **14** è teso.

Costruisco il pentagono corrispondente al nodo cui è applicata la forza **1**, conducendo 15 pel punto (13 . 14), e 16 pel punto 1 . 2. Il pentagono così ottenuto è a contorno intrecciato. Il pezzo **15** è teso, e **16** è compresso.

Costruisco il pentagono corrispondente al nodo cui è applicata la forza esterna **8**; al quale uopo guido 17 pel punto (15 . 16) e 18 pel punto (7 . 8). Il pezzo **17** è compresso, mentre **18** è teso.

E continuando così trovo tutti gli altri sforzi interni. L'ultima costruzione dà il triangolo che corrisponde al punto d'applicazione della forza **5**.

Sono compressi, **20**, **21**, **24**, **25**, **27**; tesi **19**, **22**, **23**, **26**.

37.

La fig. 8.ª **a** rappresenta un ponte, ai cui nodi sono applicate le forze **1**, **2**, ... , **16** tutte verticali; la **1** e la **9** sono dirette dal basso in alto ed esprimono le reazioni degli appoggi; le forze **2**, **3**, ... , **8** sono pesi applicati ai nodi della tavola superiore; e **10**, **11**, ... , **16** sono pesi applicati ai nodi della tavola inferiore. Queste forze sono prese nell'ordine secondo il quale sono incontrate da chi percorra il contorno della travatura; e nello stesso ordine sono disposti i lati del poligono delle forze esterne nel diagramma **b**: il qual poligono ha tutt'i suoi lati distesi in una stessa retta verticale. In questa retta, la somma de' segmenti 1, 9 è uguale ed opposta alla somma de' segmenti 2, 3, ... , 8, 10, 11, ..., 16, giacchè il sistema delle forze esterne dev'essere equilibrato.

*) Che è un quadrangolo il cui quarto lato è il lato del poligono funicolare compreso fra le forze **1**, **10**. Come già s'è detto altrove (n.ⁱ 21, 25), il poligono funicolare potrebbe anche allontanarsi tutto all'infinito.

Il diagramma b si completa ora precisamente colle regole già esposte. Cominciando dal nodo (1 . 17 . 18), tiro la 17 pel punto (1 . 2), cioè pel punto dove termina il segmento

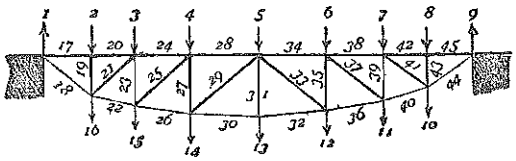

Fig. 8.ª *a*

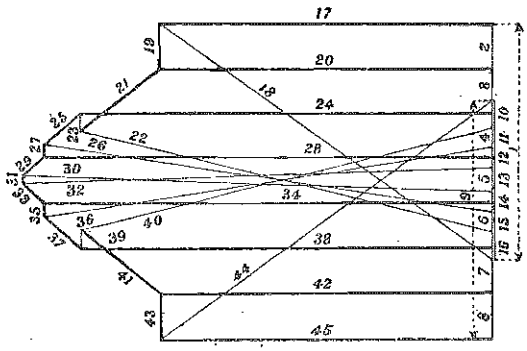

Fig. 8.ª *b*

1, che è diretto dal basso in alto e dove incomincia il segmento 2, che è diretto d'alto in basso, e la 18 pel punto (16 . 1), cioè pel punto dove termina il segmento 16 diretto d'alto in basso e dove comincia il segmento 1.

Passando al nodo (2 . 17 . 19 . 20), tiro la 19 pel punto (17 . 18) e la 20 pel punto (2 . 3), cioè pel punto dove termina 2 e dove incomincia 3, segmenti diretti ambedue di alto in basso; ed ottengo così il poligono 2. 17 . 19 . 20, che è un rettangolo.

Vengo ora al nodo (16 . 18 . 19 . 21 . 22), e tiro la 21 pel punto (19 . 20) e la 22 pel punto (15 . 16); ottengo così un pentagono a contorno intrecciato. E continuando nello stesso modo, opero successivamente rispetto ai nodi o punti d'applicazione delle forze 3, 15, 4, 14, 13, 5, 12, 6, 11, 7, 10, 9. Siccome nel diagramma a, lo schema della travatura ed il complesso delle forze esterne hanno un asse comune di simmetria (la verticale media), così anche il diagramma b è simmetrico (intorno all'orizzontale media). Così per es. il triangolo 9 . 45. 44 è simmetrico al triangolo 1 . 17 . 18; il rettangolo 8 . 45 . 43 . 42 al rettangolo 2. 17 . 19 . 20; ecc.

Tutt'i tronchi della tavola superiore sono compressi; tesi tutti quelli della tavola inferiore. Le saette oblique sono tutte compresse. Delle aste verticali, due sono tese, 23 39; le altre sono compresse.

38.

Nella fig. 9.ª **a** si contempla la metà di una rimessa di locomotive *). Le forze esterne sono i pesi **1**, **2**, **3**, **4**, **5** applicati ai nodi superiori della tettoja, e le reazioni **6**, **7** del muro e della colonna. Anche qui le forze esterne sono tutte parallele, epperò il loro poligono nel diagramma **b** si riduce ad una linea retta. La forza 6 è (presa in senso oppo-

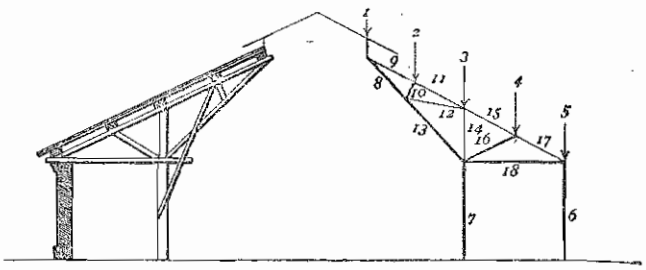

Fig. 9.ª *a*

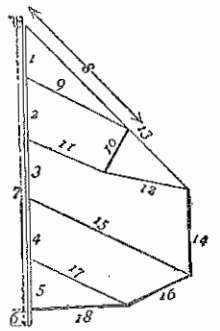

Fig. 9.ª *b*

sto) uguale ad una parte del peso 5; aggiungendo la differenza agli altri pesi, si ha la grandezza della forza 7.

Nel diagramma **b** coincidono in direzione le linee 8. 13; la prima è una parte della seconda. Qui si presenta adunque, come poligono corrispondente al nodo (8 . 10 . 12 . 13) una di quelle forme degeneri, delle quali si è discorso nel n.º 27; si ha cioè un quadrilatero 8 . 10 . 12 . 13, tre vertici (13 . 8), (8 . 10), (12 . 13) del quale sono per diritto fra loro.

Una forma degenere analoga è anche quella del quadrilatero 5 . 17 . 18 . 6 corrispondente al punto dove il tetto s'appoggia sul muro; infatti i vertici (6 . 5), punto più basso del segmento 6, (5 . 17), (18 . 6) sono in una stessa linea retta.

Sono compressi i pezzi inferiori **8**, **13**, **18**, le saette **10**, **14**, **16**, la colonna **7** ed il muro **6**; sono tese le parti superiori **9**, **11**, **15**, **17** e la saetta **12**.

39.

Il diagramma **a** della fig. 10.ª rappresenta una capriata ai cui nodi superiori sono applicate le forze oblique **1**, **2**, ..., **7**, che si possono considerare come risultanti dalle azioni combinate della gravità e del vento; le forze 8, 9 rappresentano le reazioni degli appoggi.

*) Questo esempio è preso dalla tav. 19 dell'atlante della *Graphische Statik di* CULMANN (1.ª edizione). Ivi però, come ho già notato, i due diagrammi non sono rigorosamente reciproci,

Il poligono delle forze esterne è tracciato nel diagramma b con linee doppie. Si sono successivamente costruiti il triangolo 1 . 10 . 11, il quadrilatero 9 . 10 . 12 . 13, il pen-pentagono 2 . 11 . 12 . 14 . 15, il quadrilatero 13 . 14 . 16 . 17, il pentagono a contorno

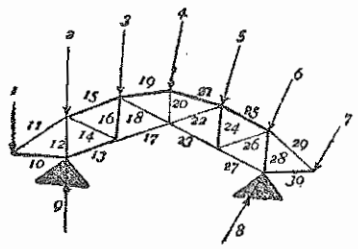

Fig. 10.ª *a*

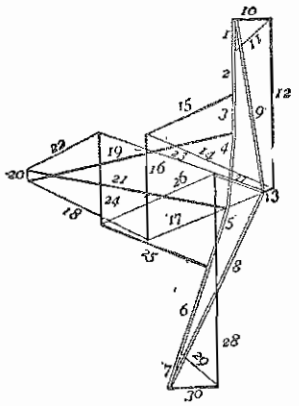

Fig. 10.ª *b*

intrecciato 3 . 15 . 16 . 18 . 19; il quadrilatero 4 . 19 . 20 . 21, pure intrecciato; il pentagono 17 . 18 . 20 . 22 . 23, ecc.

Risultano compressi i pezzi superiori **15**, **19**, **21**, **25**, i pezzi inferiori **10**, **13**, **30** e le saette **12**, **16**, **24**, **28**; tesi tutti gli altri membri.

40.

Il diagramma a della fig. 11.ª rappresenta un ponte sospeso, caricato nei nodi superiori dai pesi **1**, **2**, ... , **8**, ne' nodi inferiori dai pesi **10**, **11**, ... , **16**; i quali pesi sono equilibrati dalle due reazioni oblique **9**, **17** ai punti estremi della travatura *).

Il poligono delle forze esterne ha i primi otto lati distesi in una retta verticale, e i lati 10, 11, ... sino al 16 parimente distesi in un'altra retta verticale. I lati obliqui 9 e 17 s'intersecano, così che il contorno del poligono risulta intrecciato.

Costruisco successivamente i poligoni

$$1 . 17 . 19 . 18, \quad 16 . 19 . 20 . 21, \quad 2 . 18 . 20 . 22 . 23,$$
$$15 . 21 . 22 . 24 . 25, \quad 3 . 23 . 24 . 26 . 27, \ldots,$$

che per la maggior parte sono a contorno intrecciato.

Anche in questo esempio, i due diagrammi sono simmetrici.

Il diagramma b mostra che i membri della parte superiore sono tutti tesi, e che la

*) Questo esempio è analogo a quello che il sig. MAXWELL dà nella sua Memoria del 1870.

tensione decresce andando dalle estremità verso il mezzo; che sono tutti tesi anche i membri della tavola inferiore, ma qui la tensione diminuisce andando dal mezzo verso le estre-

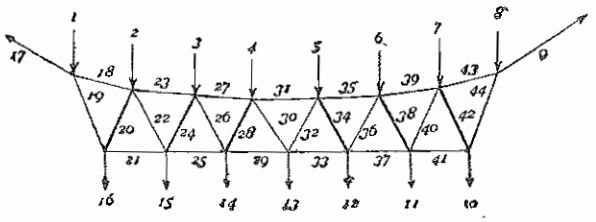

Fig. 11.ª *a*

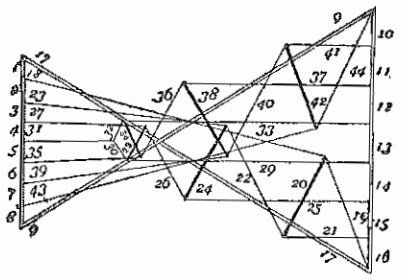

Fig. 11.ª *b*

mità. Le saette sono alternativamente tese e compresse, fuorchè al centro, dove due saette consecutive sono tese l'una e l'altra. Considerando solamente le saette tese, o solamente le compresse, si vede che lo sforzo interno decresce dalle estremità verso il mezzo della travatura.

41.

Il diagramma **a** della fig. 12.ª rappresenta una gru reticolare; il peso proprio della gru è distribuito in varie forze **1**, **2**, **3**, **4**, ..., **9** applicate ai nodi; **5** comprende anche il peso accidentale che la gru dee sostenere. Tutti questi pesi sono equilibrati dalle reazioni degli appoggi, le grandezze delle quali si ottengono decomponendo il peso risultante in tre forze dirette secondo le linee **10**, **11**, **12**. Le quali, prese in senso opposto, danno già le pressioni del puntone **10**, della colonna **11**, e la tensione del tirante **12**.

Nella figura è anche espressa siffatta determinazione delle forze esterne. Presi successivamente i segmenti d'una stessa verticale che rappresentino i pesi 1, 2, ..., 9, si è fissato un polo; e projettati da esso i punti (0 . 1), (1 . 2), (2 . 3), ..., (8 . 9), (9 . 0) *)

*) Qui (0 . 1) indica l'origine del segmento 1; e (9 . 0) il termine del segmento 9. Nella figura, i raggi uscenti dal polo del diagramma **b** ed il poligono funicolare del diagramma **a** sono indicati con linee a tratti discontinui.

si è costruito il corrispondente poligono funicolare. La verticale che passa pel punto comune ai lati esterni (0 . 1), (9 . 0) sarà la linea d'azione del peso risultante, la cui grandezza è del resto indicata dal segmento che ha l'origine comune col segmento 1 e il termine

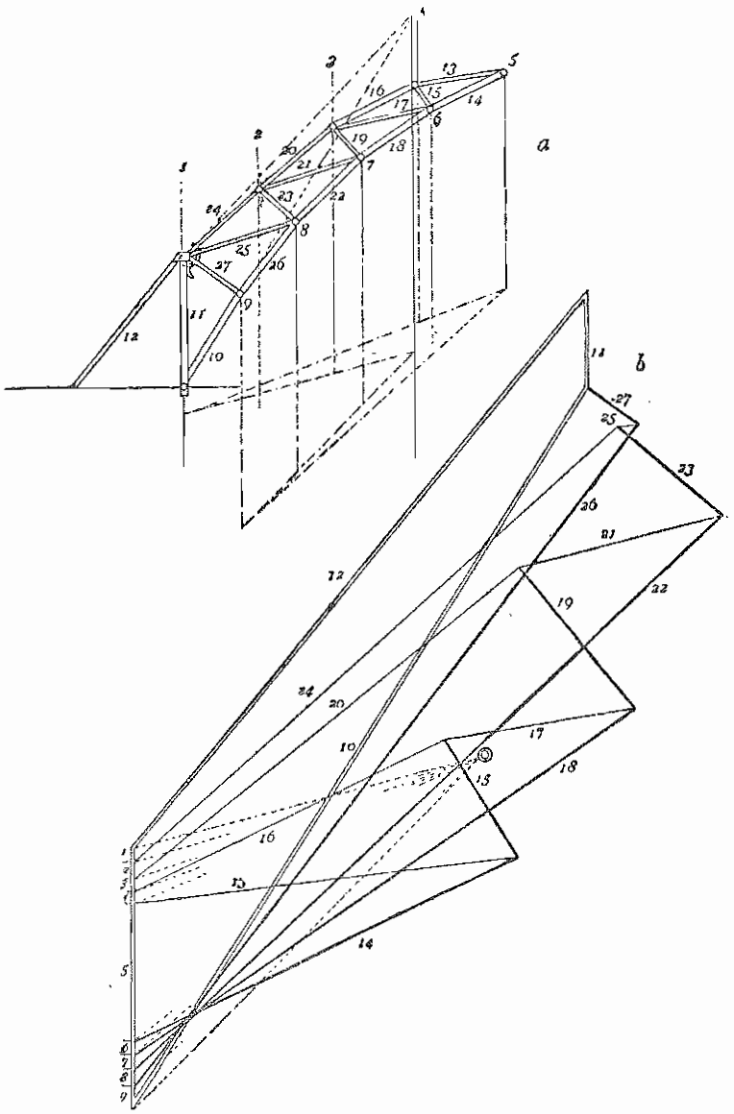

Fig. 12.ª

comune col segmento 9. Se ora si decompone questo peso risultante, che è una forza conosciuta in tutt'i suoi elementi, in tre componenti le cui linee d'azione siano **10, 11, 12,**

e ciò impiegando la costruzione già dichiarata nel n.° 34 e nella fig. 6.ª, si ottengono le tre forze 10, 11, 12. Queste, prese in senso opposto, e i pesi dati costituiscono il sistema completo delle forze esterne.

Per ottenere il diagramma b, comincio dal costruire il poligono delle forze esterne, prendendo queste nell'ordine in cui sono incontrate da chi percorra il contorno della travatura. Indi costruisco successivamente i poligoni corrispondenti ai nodi

$$(5 . 13. 14), (4 . 13 . 15 . 16), (6 . 14 . 15 . 17 . 18), \ldots ,$$

col metodo già esplicato.

Il diagramma che ne risulta fa conoscere che sono tesi i pezzi della parte superiore, e compressi i membri inferiori; quanto alle saette, si alternano le pressioni colle tensioni *).

*) Debbo essere grato al signor ingegnere C. SAVIOTTI, che mi ha usata la cortesia di eseguire disegni delle figure che accompagnano questo scritto.

NOTA AL § 12.

Dopo il 1872 molte Memorie ed Opere speciali furono pubblicate intorno alla Statica grafica o a qualche speciale argomento della medesima. Oltre alla seconda edizione di una prima parte dell'Opera capitale di Culmann, riportiamo qui i titoli di quegli scritti che al momento ci sono presenti alla mente, alcuni de' quali segnano un vero progresso della scienza. Facciamo però osservare che la nostra lista è del tutto incompleta:

R. H. BOW, *Economics of costructions in relation to framed structures.* London, 1873 *).

M. LEVY, *La statique grafique et ses applications aux constructions.* Paris, 1874.

MOHR, *Beitrag zur Theorie des Fachwerks* (Zeitschrift des Architekten — und Ingenieur — Vereins zu Hannover, t. XX, 1874).

F. WEYRAUCH, *Uebèr die graphische Statik: zur Orientirung; mit Literaturverzeichniss.* Leipzig, 1874.

JAY DU BOIS, *The elements of graphical statics and their application to framed structures, etc.* New York, 1875.

G. B. FAVERO, *Intorno alle figure reciproche della statica grafica* (Atti della R. Accademia dei Lincei, Roma, 1875).

F. STEINER, *Die graphische Zusammensetzung der Kräfte: ein Beitrag zur graphischen Mechanick.* Wien, 1876.

G. JUNG, *On a new Construction for the Central Nucleus* (Report-1876 della British Association for the Advancement of Science).

C. SAVIOTTI, *Sopra alcuni punti di statica grafica* (Atti della R. Accademia dei Lincei, Roma, 1877).

M.-W. CROFTON, *Lectures on the elements of applied mechanics.* London, 1877.

H. G. ZEUTHEN, *Ovelser i grafisk Statik* (Tidsskrift for Mathematik, Kjöbenhavn, 1877).

G. GRUGNOLA, *Dei tetti metallici; applicazione dei metodi grafici allo studio delle incavallature.* Torino, 1877.

H. T. EDDY, *New constructions in graphical statics* (Van Nostrand's Engineering Magazine. New Jork, 1877).

G. JUNG, *Ueber die Bedeutung des Centralkerns in der Biegungsfestigkeitslehre* (Amtlicher Bericht d. 50. Versammlung deutscher Naturforscher. München, 1877).

H. T. EDDY, *Researches in graphical statics* (Van Nostrand's Engineering Magazine, New Jork, 1878).

H. G. ZEUTHEN, *Anvendelse af Saetning af Maxwell til at finde de billigste Bygningskonstructioner* (Den tekniske Forenings Tidsskrift, 1877-78).

G. B. FAVERO, *La determinazione grafica delle forze interne nelle travi reticolari* (Atti della R. Accademia de' Lincei, Roma, 1878).

*) Cfr. un articolo di CLERK MAXWELL nei *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, febbraio 1876.

C. SAVIOTTI, *Le travature reticolari a membri caricati* (Atti della R. Accademia de' Lincei, Roma, 1878).

H. T. EDDY, *On the two general reciprocal methods in graphical statics* (American Journal of Mathematics pure and applied, volume 1.°, n.° 4, Baltimore, 1878).

|C. GUIDI, *Sugli archi elastici* (Memorie della R. Accademia di Torino, serie 2.ª, t. XXXVI, 1884)|.

Inoltre, molte Memorie e Note di:

G. JUNG e A. SAYNO, ne' *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo* (Milano, 1874-75-76-79).

HIRSCH, MOHR e RITTER, nel *Civilingenieur*, t. XXI e XXII (Leipzig, 1875-76).

G. JUNG, A. SAYNO, C. SAVIOTTI ed E. CAVALLI, nel *Politecnico*, anni XXIV e XXV (Milano, 1876-77-78-79).

G. FOURET, nei *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (Paris, 1875).

G. JUNG, nel *Bullettin de la Société mathématique de France* (Paris, 1876-79).

E. CAVALLI, negli *Annali dell'Istituto tecnico di Livorno* (1877).

G. SACHERI e C. MODIGLIANO, nel periodico l'*Ingegneria civile* (Torino 1876-77).

C. SACHERI e F. ZUCCHETTI, negli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* (1875-76).

Ecc. ecc.

|Infine, gli scritti più recenti che si riferiscono all'argomento delle travature reticolari sono i seguenti:

C. GUIDI, *Sulla determinazione grafica delle forze interne nelle travi omogenee e nelle travi reticolari appoggiate agli estremi e soggette ad un sopracarico mobile* (Atti della R. Accademia dei Lincei, Roma, 1880).

C. SAVIOTTI, *Nuovi tipi di travature reticolari strettamente indeformabili* (Annuario del R. Istituto tecnico di Roma, 1880).

C. GUIDI, *Sul calcolo delle travi armate* (Giornale del Genio Civile, Roma, 1880).

C. GUIDI, *Delle travi reticolari paraboliche e parallele* (Giornale del Genio Civile, Roma, 1881).

C. SAVIOTTI, *Il problema dei tre membri nella Statica grafica* (Giornale del Genio Civile, Roma, 1883).

C. SAVIOTTI, *Le funicolari coniche dedotte da forme reciproche nello spazio* (Giornale del Genio Civile, Roma, 1884).|

Del presente opuscolo *Le figure reciproche nella Statica grafica*, che qui viene ristampato in una terza edizione conforme alla seconda del 1872, fu fatta una traduzione libera in tedesco dall'ingegnere A. MIGOTTI ed inserita nella *Zeitschrift des österr. Ingenieur — und Architekten — Vereins*, Wien, 1873.

---

[92] Pag. 306. Qui devono farsi le restrizioni dette nella nota [67] al n. **91**.

[93] Pag. 309. Qui e in seguito, in casi simili, si ripeta una osservazione analoga a quella fatta nella nota [83] al n. **94**.

[94] Pag. 311. Alle parole: «la retta D', così» si sostituiscano queste altre: «la direttrice dell'iperboloide stesso passante per uno A' dei punti di sezione della generatrice D' colla F' (quello la cui proiezione piana è stata assunta come uno dei tre punti fondamentali della trasformazione quadratica detta sopra), così, se quella direttrice sega ulteriormente la F' nel punto B', ».

[95] Pag. 311. Alle parole: «e pei due punti doppi» si sostituiscano queste altre: «pel punto doppio imagine di A' e pel punto semplice imagine di B'».

[96] Pag. 319. Per le corrispondenze studiate in questo capitolo è soltanto $\mu = 3, 4, 5$.

[97] Pag. 320. Invece di: «che passa per O_1 e incontra D e G_1» si legga: «diversa da D sezione dell'iperboloide $DG_1G_2O_1O_2$ col piano O_1D».

[98] Pag. 321. Invece di: «che passa per O_r e si appoggia a D, G» si legga: «diversa da D sezione dell'iperboloide $DGO_1O_2O_3O_4$ col piano DO_r ».

[99] Pag. 325. La continuazione, che presumibilmente si doveva riferire agli altri tipi di trasformazioni ($\mu = 3, 4, \ldots, 9$) non considerati nel capitolo e accennati nel titolo di esso, non è mai venuta.

[100] Pag. 326. Questa Memoria fu presentata all'Accademia di Bologna nella sessione ordinaria del 18 Aprile 1872 (V. il Rendiconto di detta Accademia, Anno 1871-72, p. 83) colle stesse parole messe qui per introduzione.

[101] Pag. 331. Dalle (16), nell'originale, mancavano i coefficienti numerici, che qui si son messi affinchè le formole di rappresentazione di F assumano veramente la forma (17), e sussista senza mutamenti ciò che vien dopo.

[102] Pag. 332. Abbiam sostituito «intersezione» alla parola «contatto» che era nell'originale. (È invece conica di *contatto* tra F_3 e le quadriche quella di cui si dice nel rigo seguente del testo).

[103] Pag. 336. Di questa Memoria sono state fatte tre edizioni italiane edite dall' HOEPLI.

La prima edizione uscì a Milano il 1.° giugno 1872, *per le nozze di* CAMILLA BRIOSCHI *con* COSTANZO CARCANO, insieme alla Memoria di CASORATI: *Le proprietà cardinali degli strumenti ottici anche non centrati.* La lettera scritta dai due autori alla Sposa in quella occasione termina così:

..... non Le dispiacerà, ne siamo sicuri, che due suoi vecchi amici abbiano voluto

in questo giorno solenne attestare pubblicamente anche i sensi di gratitudine e di ammirazione per quell'Illustre di cui Ella ha la fortuna di essere degna ed amatissima Figlia, e del cui alto ingegno e della cui indefessa attività fanno splendida testimonianza non solo gli studi posti nelle più ardue questioni della scienza astratta, ma questo medesimo Istituto che abbiamo visto sorgere in Milano, mercè l'opera sua; che ha già dati tanti giovani cooperatori alle nostre crescenti industrie, ed acceso in parecchi l'amore per quelle applicazioni della scienza di cui l'ingegnere sente ogni dì più il desiderio e il bisogno. Tra questi ultimi ci mettiamo anche noi; e per ciò appunto abbiamo voluto che a siffatte applicazioni si riferissero i presenti nostri lavori.

La seconda edizione comparve poco tempo dopo, preceduta dalla seguente prefazione (avente la data: Milano, 12 agosto 1872):

Questo breve lavoro era già venuto alla luce una prima volta, accompagnato da una Memoria del mio amico Felice Casorati, in certa occasione solenne, che fu vera festa di famiglia per gli amici del Direttore dell'istituto politecnico milanese (1.° giugno p. p.). Ora lo ristampo senz'aggiunte, all'infuori di qualche lieve emenda, in edizione più modesta, a comodità de' giovani allievi dell'Istituto che debbono seguire il corso di statica grafica.

L'argomento di queste poche pagine, cioè l'uso de' metodi geometrici per determinare le tensioni e le pressioni nelle travature reticolari sottoposte a dati sistemi di forze esterne, avrebbe meritato uno svolgimento più ampio; ed infatti, era mia intenzione di far succedere una seconda parte a quell'unica che, a cagione del giorno fisso, potè allora essere stampata. Ma anche adesso l'attuazione del proposito è impedita da altri ostacoli, sicchè m'è forza rimandarla ad altra occasione.

In questa seconda edizione trovasi alla fine una nota relativa al n.° 1, che qui si riporta:

Noi italiani troppo spesso dimentichiamo i meriti de' nostri connazionali. Il mio dottissimo amico prof. Chelini, poichè ebbe veduta la 1.ª edizione di quest'opuscolo, mi fece ricordare che la teoria delle figure reciproche, offerta dalla statica nella riduzione delle forze, prima che da Möbius, fu data dal sig. Gaetano Giorgini (ora senatore del Regno) in una Memoria che ha per titolo *Sopra alcune proprietà dei piani de' momenti principali e delle coppie di forze equivalenti,* da lui presentata alla Società Italiana delle scienze nel 1827 e stampata nel t. 20 (Modena 1828) delle Memorie della Società. Ivi, a p. 247, si legge il teorema sulla corrispondenza fra punti e piani; a p. 249 quello sulle rette reciproche, ed assunto l'asse centrale per asse delle z, l'Autore ottiene formole, che in sostanza non differiscono da quelle del n.° 5.

Il medesimo prof. Chelini ebbe la bontà d'informarmi che « il Giorgini è autore

« di un'opera *Elementi di statica* (Firenze 1835), dove sono dimostrate parecchie pro-
« posizioni contenute nella Memoria del 1828 »; e che « nella *Correspondance mathé-*
« *matique et physique* di A. QUETELET, t. II (Bruxelles 1830), p. 112, il sig. CHASLES,
« parlando del GIORGINI già stato suo compagno di studi alla scuola politecnica di Francia,
« fa allusione alla sunnominata Memoria, e dice che anche in tale ricerca i due antichi
« condiscepoli si sono incontrati insieme nelle medesime vedute ».

L'illustre CHASLES espose la teoria delle figure reciproche, di cui qui è discorso, anche nella sua Memoria *Sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie,* presentata nel 1830 all'Accademia delle scienze nel Belgio e inserita nel t. II dei *Mémoires couronnés* (Bruxelles 1837): veggasi p. 679.

Nelle brevi righe che l'editore HOEPLI premise alla terza edizione (colla data: Milano, giugno 1879), è detto che CREMONA avrebbe desiderato di rifondere il suo lavoro per approfittare delle posteriori pubblicazioni sull'argomento, ma che, non avendone trovato il tempo, aveva infine consentito a quella terza edizione conforme alla seconda, astrazion fatta da alcuni ritocchi nelle indicazioni bibliografiche. Inoltre questa terza edizione fu fatta precedere da una breve *Introduzione*, appositamente scritta dal Prof. G. JUNG, dietro accordo col CREMONA, sulle proprietà del sistema nullo dedotte dalla composizione delle forze nello spazio.

Nel 1885 fu pubblicata una traduzione francese di LOUIS BOSSUT, Capitaine du Génie (Paris, GAUTHIER-VILLARS), alla quale CREMONA pose la seguente prefazione (colla data: Rome, mars 1884):

L'Opuscule *Le figure reciproche nella Statica grafica,* livré au public, pour la première fois, en 1872, eut l'honneur et le bonheur d'obtenir un accueil très amical, presque enthousiaste, d'un juge éminent, l'illustre CULMANN, le créateur de la Statique graphique *). Depuis lors, un grand nombre d'écrivains exercèrent leur sagacité sur les applications des figures réciproques à la science des constructions **).

M. le capitaine BOSSUT (par l'entremise de mon cher ami le lieutenant-colonel DEWULF) et M. GAUTHIER-VILLARS m'ayant exprimé le désir de faire une édition française de cet Ouvrage, j'acceptai leur honorable proposition, en leur suggérant de le faire suivre d'un Appendice comprenant les progrès les plus importants que la théorie des figures réciproques et son application aux travures réticulaires ont faits depuis 1872. M. SAVIOTTI aidant par ses excellents Mémoires et par d'autres contributions nouvelles, M. BOSSUT a pu réunir et coordonner les matériaux qui constituent les cinq Chapitres de l'Appendice. Le lecteur intelligent sera heureux d'y rencontrer un travail presque entièrement original. De plus, l'édition française a conservé l'Introduction que M. JUNG avait placée en tête de la troisième édition italienne (Milan, 1879).

*) *Voir* la Préface de la deuxième édition allemande (Zürich, 1875).

**) LÉVY, FAVERO, SAVIOTTI et plusieurs autres.

Je serai satisfait si, en encourageant cette publication, j'ai contribué à confirmer cette vérité proclamée bien haut par CULMANN, que la Géométrie moderne (Géométrie de position, Géométrie projective) est un élément essentiel et puissant pour le développement de l'art de l'ingénieur.

Du reste, l'application des figures réciproques aux travures réticulaires n'est que l'un des Chapitres de la Statique graphique, de cette Science dont le Traité le plus complet est encore celui de CULMANN. Quel malheur que le professeur de génie de Zurich ait été enlevé à son école et à la Science, en pleine activité et avant qu'il ait pu achever la seconde édition, si vivement désirée, de son Ouvrage classique!

Je termine en remerciant, pour M. SAVIOTTI et pour moi, MM. BOSSUT et GAUTHIER-VILLARS pour les soins intelligents que, chacun de son côté, ils ont mis à vaincre les difficultés qui s'opposaient à une bonne exécution de leur plan.

L'appendice, di cui CREMONA discorre in questa prefazione, ha per titolo: « *Nouvelles méthodes pour le calcul des travures réticulaires et l'étude des travures chargées d'une façon quelconque;* par M. CH. Saviotti, Professeur a l'École des Ingénieurs, a Rome ».

Nel 1890 apparve una traduzione inglese, pubblicata insieme alla traduzione inglese degli *Elementi di Calcolo grafico,* di THOMAS HUDSON BEARE *(Graphical statics, Two Treatises by* L. CREMONA, Oxford, At the CLARENDON Press), colla seguente prefazione di CREMONA (avente la data: Rome, October, 1888):

At a time when it was the general opinion that problems in engineering could be solved by mathematical analysis only, CULMANN's genius suddenly created Graphical Statics, and revealed how many applications graphical methods and the theories of modern (projective) geometry possessed.

No section of Graphical Statics is more brilliant or shows more effectually the services that geometry is able to render to mechanics, than the one dealing with reciprocal figures and framed structures with constant load.

It is to this circumstance that I owe the favourable reception my little work *(Le figure reciproche nella statica grafica,* Milano, 1872) met with everywhere; and not the least from CULMANN himself. It has already had the honour of being translated into German and French. Having been requested to allow an English version of it, to be published by the Delegates of the Clarendon Press, I consented with pleasure to Professor BEARE undertaking the translation.

I have profited by this occasion to introduce some improvements, which I hope will commend themselves to students of the subject.

Questa traduzione inglese contiene soltanto i due lavori di CREMONA, il quale aggiunse una breve trattazione geometrica del sistema nullo che si riporta nella nota [104].

Per il resto, tanto nella traduzione francese quanto nella inglese, sono state introdotte,

prescindendo da lievi differenze di forma che non occorre rilevare, alcune piccole variazioni, in parte contenute manoscritte nella copia della terza edizione, appartenente al Cremona, che ha servito alla presente pubblicazione. Nella quale, conforme alle convenzioni stabilite, si sono messe fra sgraffe le aggiunte e varianti desunte dalla detta copia e dalle ricordate traduzioni, come pure le nuove indicazioni bibliografiche, inserite specialmente nella traduzione francese.

È stata pure fatta, nel 1873, una traduzione tedesca col titolo: *Die reciproken Figuren in der graphischen Statik, von* LUIGI CREMONA *prof. am Polytechnikum zu Mailand, in freier Uebersetzung aus dem Italienischen und mit Vorausschickung einer kurzen Ableitung der Theorie der reciproken Polyeder* von A. MIGOTTI Ingenieur. Fu inserita nella Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur-und Architeckten-Vereins, XXV Jahrgang, Wien 1873, pp. 230-240.

Di tale traduzione, la quale non presenta alcuna particolarità che meriti di essere osservata, CREMONA dà notizia alla fine di questa terza edizione (pag. 366 del presente tomo).

[104] Pag. 336. Ai n. 1, 2, 3 CREMONA sostituisce nella traduzione inglese la seguente trattazione:

1. THAT dual and reciprocal correspondence between figures in space, discovered by MÖBIUS, in which, to any plane whatsoever, corresponds a pole situated in the same plane, and all planes passing through any one point have their poles on the polar plane of that point, is called a *Null-system* by German mathematicians.

Such a correspondence is obtained in the following manner. Let there be a plane δ, and four points in it A, B, C, D, no three of which are in one straight line; and let there be three other planes α, β, γ passing through AD, BD, CD, respectively. These will be the fixed elements in the construction.

Draw any plane whatever σ cutting the straight lines $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ in P, Q, R respectively, then the planes PBC, QCA, RAB will all intersect in the same point S of the plane σ.

Demonstration. Let X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, be the points in which the straight line $\sigma\delta$ intersects the sides BC, CA, AB, AD, BD, CD of the complete quadrilateral ABCD; these points form three pairs of conjugate points of an involution, by DESARGUES's Theorem. Since the planes δ, σ, α, meet in X_1, the straight line QR common to the planes σ, α passes through that point; similarly RP passes through Y_1, and PQ through Z_1. Of the six points in involution, taken now in the plane σ, three, X_1, Y_1, Z_1, belong to the sides QR, RP, PQ of a triangle PQR; therefore the straight lines XP, YQ, ZR meet in one point S, which with PQR forms a complete quadrilateral.

Therefore the planes BCPX, CAQY, ABRZ meet in a point S of the plane PQR.

This theorem may be expressed as follows.

If the faces of a tetrahedron ABCS pass respectively through the vertices of another tetrahedron PQRD, and if three faces of the latter pass through three vertices of the former, then the fourth face of the second tetrahedron will pass through the fourth vertex of the first (Theorem of MÖBIUS).

2. Starting from the fixed elements A, B, C, α, β, γ, let any plane σ whatever be given, and let it be required to determine by means of this theorem the point S lying in it.

The plane σ meets the straight lines $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ in three points P, Q, R, and the three planes PBC, QCA, RAB intersect in the required point S.

Conversely, given any point S whatever, to determine the corresponding plane σ, which passes through S.

The planes SBC, SCA, SAB intersect $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ in three points P, Q, R; the plane of these points is the required plane.

The point S is called the *pole* of the plane σ, and the latter is termed the *polar plane* of S.

3. If the plane σ change its position, the points Q, R in it remaining fixed, the planes QCA, RAB will remain fixed, and therefore the point S will move on the straight line (which passes through A) common to these two planes. When the point P falls on D, that is, when σ coincides with QRD (i. e. α), the plane PBC coincides with ABCD, and S falls on A. Then A is the pole of the plane α, and similarly B and C are the poles of β, γ.

If the arbitrary plane σ passes through BC, the traces of the planes QCA, RAB on it, will be the straight lines QC, RB which are the traces of the planes γ, β; therefore the pole falls in the straight line $\beta\gamma$, i. e. on P. The points P, Q, R are consequently the poles of the planes PBC, QCA, RAB.

If the arbitrary plane coincides with ABC, the point P falls on D, i. e. D is the pole of the plane ABC.

4. The pole S of the arbitrary plane σ (or conversely the polar plane σ of the arbitrary point S) has been determined starting from the system, supposed given, of three planes α, β, γ (having no straight line in common) and their poles A, B, C. But in the tetrahedron ABCS the relations between the vertices (or the faces) are perfectly reciprocal, that is, are interchangeable; so that just as S has been deduced from ABC$\alpha\beta\gamma$, so A may be determined from SBC$\sigma\beta\gamma$; and so on. From this it follows that if S_1, S_2, S_3 are the poles of any three arbitrary planes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (not passing through the same straight line), deduced in the manner above described from the system ABC$\alpha\beta\gamma$, the pole S of the plane σ, determined from this same system, coincides with that which would be determined by a similar construction starting from $S_1 S_2 S_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ as the given system.

5. From the theorem of MÖBIUS it follows that if the plane σ be drawn through the pole P of a plane π=PBC, the pole S of the plane σ falls in π; therefore:—

If a plane passes through the pole of another plane, conversely the latter contains the pole of the former, that is to say:—

If a point lies in the polar plane of a second point, the latter lies in the polar plane of the former.

From this it follows that the poles of all the planes passing through a point S lie in a single plane σ, the polar plane of S; and the polars of all the points of a plane σ pass through one and the same point S, the pole of σ.

6. Let α, β be two planes, and A, B theirs poles. Any plane whatever through AB will have its pole in α and in β, that is, in the straight line $\alpha\beta$; conversely, the polar plane of any point whatever of $\alpha\beta$ will pass thro' ch A and B, i. e. through the straight line AB. And any plane whatever through the straight line $\alpha\beta$, which contains the poles of the planes through AB, will have its pole on the straight line AB; and conversely, any point whatever of AB, being on the polar plane of the points of $\alpha\beta$, will be the pole of a plane through $\alpha\beta$.

Two straight lines, such as $\alpha\beta$ and AB, each of which is the locus of the poles of planes passing through the other, are called *reciprocal straight lines.*

Hence it follows that if a straight line r passes through a point A, its reciprocal r' lies in α, the polar plane of A; and conversely.

7. A straight line r, which lies in a plane α and passes through A, the pole of α, coincides with its reciprocal, that is to say, it is reciprocal to itself. In fact, if M is any other point whatever of r, since M lies in α, the polar plane of A, then μ, the polar plane of M, passes through A. And since μ must also pass through M, the polar plane of it or of any point whatever of the given straight line r, passes through the straight line r.

From this it follows, that two reciprocal straight lines r and r', which are non-coincident, cannot lie in one plane. If a plane α passes through both r and r', the pole A of the plane will be on both r and r', and r would lie in a plane and contain its pole, therefore r would be reciprocal to itself.

All straight lines reciprocal to themselves and passing through a given point A lie in α, the polar-plane of A. All straight lines reciprocal to themselves and lying in a given plane α pass through A, the pole of α.

A system of straight lines reciprocal to themselves is called a *linear complex*, and the straight lines are called *rays* of the complex.

Each ray of the complex which meets a given straight line r (not itself a ray) meets also its reciprocal straight line r'. In fact, if A is the point common to the ray and to r, the plane α, the polar of A, must pass through the ray and the straight line r'.

Conversely, if a straight line t meets two reciprocals r and r', the straight line t is necessarily a ray. For, the point tr is the pole of a plane which passes through this point, and through r'; therefore the plane also passes through t. Hence t lies in a plane polar to one of its own points, or t is a ray.

From this it follows that all the straight lines (necessarily rays) cutting two reciprocal straight lines r and r', and another line s, also meet the straight line s' reciprocal to s. Two pairs rr', ss' of reciprocal straight lines are therefore situated on the same hyperboloid, the generators of which of another system are all rays of the complex.

8. All planes parallel to the same plane may be considered as having in common a line r' situated at infinity, therefore their poles all lie on a straight line r, the reciprocal of r'. Changing the bundle of parallel planes, the straight line r remains parallel to itself, because it passes through a fixed point I lying at infinity, that is, through the pole of the plane ι at infinity, in which the straight line r' is always situated.

Such lines r, whose reciprocals lie at infinity, are called *diameters* of the complex.

Planes perpendicular to the common direction of the diameters are parallel to each other, therefore their poles are on a diameter. This diameter a, which is distinguished from the other diameters by being perpendicular to the planes whose poles it contains, is called the *central axis* of the complex.

Straight lines parallel to the central axis are reciprocals to straight lines in the plane at infinity ι; and in particular the central axis is reciprocal to the line at infinity common to all planes perpendicular to the central axis itself. The point I, at infinity on the central axis, is the pole of the plane at infinity.

9. If r and r' are any two reciprocal straight lines whatever, the straight line which passes through their points at infinity will be a ray of the complex, and will therefore pass through the pole I of the plane at infinity; that is, the points at infinity of two reciprocal straight lines and of the central axis are all three in one straight line. Hence it appears that two reciprocal straight lines and the central axis are parallel to the same plane.

Therefore, planes parallel to the central axis and passing through two reciprocal straight lines are parallel to each other.

From this it follows that:

If two reciprocal straight lines are projected, parallel to the central axis, on a plane, not containing the direction of the central axis, their projections will be two parallel straight lines.

We shall suppose that the projection is made on a plane perpendicular to the central axis.

Moreover, it follows that the straight line meeting two reciprocal straight lines and perpendicular to them cuts the central axis orthogonally.

Dopo di che la traduzione inglese continua come nei n.i 4, 5, 6 . . . , solo variando l'ordine dei n.i 4, 5 (che sono rispettivamente i n.i 11, 10 di quella traduzione).

[105] Pag. 406. La Memoria di VERONESE (pp. 649-703 del citato volume), che ha dato ori-

gine a questa Memoria di CREMONA, fu presentata all'Accademia dei Lincei, nella seduta della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali dell' 8 aprile 1877 dal Socio BATTAGLINI, il quale ne lesse un sunto, a nome dell'Autore, come è detto nel rendiconto della seduta stessa (Atti citati, Transunti, serie III, volume I (1876-77), pp. 142-143). Riportiamo qui la parte rimanente di quel rendiconto che si riferisce alla Memoria di CREMONA:

« Il Socio CREMONA prende allora la parola e, premesse alcune riflessioni per mettere in evidenza i pregi del lavoro testè presentato dal collega BATTAGLINI, aggiunge quanto segue:

Avendomi il sig. VERONESE pregato di leggere la sua Memoria, io feci pensiero di verificare i risultati in essa contenuti per una via diversa da quella che l'A. aveva seguita. Mentr'egli si è attenuto sempre alla geometria piana, io ebbi ricorso allo spazio a tre dimensioni e propriamente ad *una superficie di terzo ordine dotata di un punto doppio,* ed ottenni così delle figure che proiettate dal punto doppio somministrano immediatamente quelle del sig. VERONESE.

Per brevità di discorso, applicherò ai punti ed alle rette dello spazio le denominazioni che competono alle loro proiezioni. Oltre alle 6 rette situate sul cono tangente che ha il vertice nel punto doppio, la superficie cubica ha 15 rette situate a tre a tre in 15 piani tritangenti. Due piani tritangenti non aventi in comune una retta della superficie si segano lungo una *retta di Pascal;* le coppie analoghe di piani tritangenti sono 60 (che in proiezione dànno i 60 esagoni formabili con 6 punti di una conica), epperò si hanno 60 rette di Pascal. Esse costituiscono a tre a tre gli spigoli di 10 coppie di *triedri conjugati* (CREMONA, *Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du 3.e ordre* (Berlin 1868) [Queste Opere, n. 79], n.° 148.); dove i triedri di una coppia si intersecano fra loro lungo 9 rette della superficie. I vertici di questi triedri, conjugati a due a due, sono i 20 *punti di Steiner.*

C'è un'altra specie di triedri; se prendiamo una retta di Pascal, i due piani tritangenti che passano per essa contengono sei rette della superficie; le altre nove rette formano allora tre triangoli che sono le facce di un triedro della seconda specie. I triedri analoghi sono 60; i loro vertici sono i *punti di Kirkman*, coordinati per tal modo alle rette di Pascal. I due piani tritangenti la cui intersezione è una retta di Pascal e i tre piani tritangenti che concorrono nel corrispondente punto di Kirkman formano un *pentaedro,* i cui dieci vertici sono tutti punti di Kirkman e i cui dieci spigoli sono le corrispondenti rette di Pascal. I pentaedri analoghi sono *sei*, e dànno in proiezione le sei figure π del sig. VERONESE. Due pentaedri hanno sempre un piano comune, ma i vertici e gli spigoli sono tutti differenti.

Ogni retta di Pascal contiene un punto di Steiner; le otto rette di Pascal che sono in uno stesso piano tritangente concorrono a due a due in quattro punti di Steiner che sono in una retta (*retta di Steiner-Plücker*). Il numero delle rette analoghe è 15, una in ciascun piano tritangente. Pei detti quattro punti di Steiner passano altre quattro