ZEITSCHRIFT

DES

VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE.

Redakteur:

Dr. Th. Peters,

Direktor des Vereines.

Band 50.

(Fünfzigster Jahrgang)

1906.

Mit 20 Tafeln, 18 Textblättern und rd. 4600 Figuren im Text

Berlin.

Selbstverlag des Vereines.

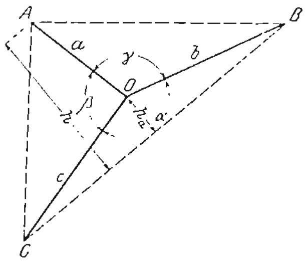
Kommissionsverlag und Expedition: Julius Springer,

Berlin N., Monbijou-Platz 3.

Knickfestigkeit eines dreiarmigen ebenen Systems.

Wenn drei Druckstäbe eines ebenen Fachwerkes in einem Knoten zusammenlaufen, so kann dieses System der Knickgefahr ausgesetzt sein, auch wenn die drei Glieder, jedes für sich, knicksicher sind und ihre Verbindung zu einem gemeinschaftlichen Knoten als vollkommen starr gelten kann. Derartige Systeme kommen ziemlich oft vor, namentlich bei Wandkranen und bei den Eckversteifungen von Portalen. Zur Ermittlung der vorhandenen Knicksicherheit gebraucht man als Notbehelf eine Faustregel, nach der die größte Seitenlänge des Dreiecks ABC, Fig. 1, und die größte der beiden zugehörigen Stabkräfte als maßgebend angesehen werden. Die folgende Untersuchung führt zu einer Berechnungsart, die dem Konstrukteur gestattet, die Knicksicherheit des Systems ohne große Mühe zu ermitteln; die daraus abgeleitete Formel für die vorläufige Bemessung läßt einen Einblick in die maßgebenden Verhältnisse gewinnen.

Fig. 1.



Im mittleren Knoten O soll keine äußere Kraft angreifen.

Wir bezeichnen mit

- a, b, c die Stablängen,
- α, β, γ die eingeschlossenen Winkel,
- (A), (B), (C) die drei Druckkräfte (durch die Beziehungen $\frac{(A)}{\sin\alpha} = \frac{(B)}{\sin\beta} = \frac{(C)}{\sin\gamma}$ miteinander verbunden),
- J_a, J_b, J_c die in Betracht kommenden Trägheitsmomente,
- F, F_a, F_b, F_c die Flächen der Dreiecke ABC, OBC, OAC, OAB, so daß $F = F_a + F_b + F_c$[1]).

In A, B und C sollen reibungslose Kugelgelenke vorausgesetzt werden; denn zu einer auch unvollkommenen Einspannung wäre in den dort angeschlossenen Gliedern des sonstigen Fachwerkes eine Torsionsfestigkeit erforderlich, die im allgemeinen nur in ganz geringem Maße vorhanden ist. Aber auch in der Ebene der Figur wollen wir eine vollständige Drehungsfreiheit annehmen, weil die Biegungsfestigkeit der anschließenden Stäbe nicht vollkommen ist und bereits eine sehr schwache Krümmung derselben der Wirkung eines Kugelgelenkes (wie die nachstehende Theorie voraussetzt) gleichkommt. Im Punkt O müssen wir dagegen eine starre Verbindung der drei Stäbe miteinander annehmen, wobei die Formänderung der Knotenbleche schon dadurch berücksichtigt ist, daß die geometrischen Längen der Stäbe OA, OB und OC in die Rechnung eingeführt werden. Für diese Längen müssen die drei Stäbe auf alle Fälle knicksicher sein; in der Ebene der Figur werden sie sich also nicht durchbiegen. Bei einer Durchbiegung rechtwinklig dazu schließen sich in O die drei elastischen Linien tangential an eine gemeinschaftliche Ebene an.

Sind die Abstände der Punkte A, B und C von dieser Ebene f_a, f_b und f_c sehr klein, so kann man den Abstand ξ des Punktes O von der Ebene ABC durch diese drei Größen einfach ausdrücken. Denkt man sich nämlich die Seite BC festgehalten und den Punkt A um f_a gehoben, so ist die entsprechende Hebung von O: $a' = f_a \frac{h_a}{h} = f_a \frac{OBC}{ABC} = f_a \frac{F_a}{F}$. Wird der Punkt B um f_b gehoben, so hebt sich O um $b' = f_b \frac{F_b}{F}$. Schließlich ist nach Hebung des Punktes C: $c' = f_c \frac{F_c}{F}$. Folglich: $\xi = a' + b' + c'$ oder:

$$\xi = \frac{f_a F_a + f_b F_b + f_c F_c}{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

In Fig. 2 ist der Querschnitt AO dargestellt. Die Gleichung der Biegungslinie muß der Bedingung

$$\frac{d^2 y}{d_x^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{(A)\,y}{EJ_a}$$

genügen, d. h. sie hat die Form

$$y = S \sin kx + T \cos kx,$$

wo $k = \sqrt{\frac{(A)}{EJ_a}}$.

Für $x = 0$ ist $y = 0$, also $T = 0$; für $x = a$ ist $y = \xi$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_a - \xi}{a}$, also

$$\xi = S \sin ka, \quad Sk \cos ka = -\frac{f_a - \xi}{a},$$

woraus

$$\frac{\xi k}{\operatorname{tg} ka} = -\frac{f_a - \xi}{a}$$

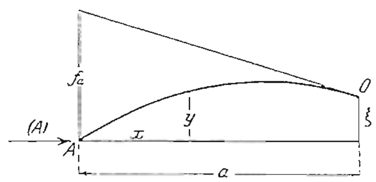
oder

$$\frac{ka}{\operatorname{tg} ka} = 1 - \frac{f_a}{\xi}$$

und schließlich

$$f_a = \xi \left(1 - \frac{ka}{\operatorname{tg} ka}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Fig. 2.



Aehnliche Ausdrücke erhält man für f_b und f_c. Nach Einsetzung in die Formel (1) ergibt sich die Bedingung für das Eintreten der Biegung, d. h. für die sogenannte einfache Knicksicherheit:

$$1 = \frac{\left(1 - \frac{ka}{\operatorname{tg} ka}\right) F_a + \left(1 - \frac{k'b}{\operatorname{tg} k'b}\right) F_b + \left(1 - \frac{k''c}{\operatorname{tg} k''c}\right) F_c}{F},$$

oder:

$$\frac{ka}{\operatorname{tg} ka} F_a + \frac{k'b}{\operatorname{tg} k'b} F_b + \frac{k''c}{\operatorname{tg} k''c} F_c = 0 \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Aufgabe ist hiermit theoretisch gelöst.

Man erkennt sofort, daß von den drei Bogen ka, $k'b$ und $k''c$ mindestens einer $> \frac{\pi}{2}$ und mindestens einer $< \frac{\pi}{2}$ sein muß (die Lösungen in der Nähe von π, $\frac{3\pi}{2}$ usw. kommen nicht in Betracht). Aus $ka = a\sqrt{\frac{(A)}{EJ_a}}$ ergibt sich ferner, daß die Bogenlänge mit der Druckkraft zunimmt; wenn also die Summe (3) einen positiven Wert hat, so müssen alle drei Kräfte (A), (B) und (C) mit einem gewissen Koeffizienten $\mu > 1$ multipliziert werden, damit die Gleichung befriedigt wird, d. h. die Sicherheit ist > 1. Aehnlich läßt ein negativer Wert der Summe (3) auf eine Sicherheit < 1 schließen. Werden die drei Druckkräfte mit μ multipliziert, so sind die entsprechenden Bogenlängen $ka\sqrt{\mu}$, $k'b\sqrt{\mu}$, $k''c\sqrt{\mu}$; mit Hülfe des Rechenschiebers und einer Tabelle der Kreisfunktionen, unter Beachtung der obigen Bemerkung, ist es leicht, die Werte der Summe für einige angenommene Werte von μ zu ermitteln, wobei eine einfache Interpolation die hinreichend genaue Lösung liefert.

Für die Bedürfnisse der Praxis ist indessen ein solcher Berechnungsgang zu langwierig; außerdem ist die Formel (3), so elegant sie auch aussieht, zu unübersichtlich, um dem Konstrukteur dienlich zu sein.

[1]) Es können dafür auch die doppelten Werte der Flächen eingeführt werden, was für die numerische Berechnung bequemer ist; auch ist es, da es nur auf die Verhältnisse zwischen diesen Größen ankommt, gleichgültig, in welchem Maßstabe sie ausgedrückt werden.

Behufs Aufstellung einer angenäherten Formel[1]) greifen wir wieder zur Gl. (2), wo $k = \sqrt{\frac{(A)}{E J_a}}$. Die Knicksicherheit n des Stabes mit der Länge a ist bei drehbaren Enden $n_a = \frac{\pi^2 E J_a}{(A)\, a^2}$. Aus diesen Formeln folgt: $ka = \frac{\pi}{\sqrt{n_a}}$.

Mit dem Sicherheitswert n wird man in keinem Fall unter 5 bleiben (ein Blick auf das Endergebnis dieser Theorie zeigt, daß das System sehr nahe an der gefährlichen Belastung wäre) und selten über 80 gehen, denn dieser letzte Wert bedingt bereits eine sehr reichliche Sicherheit. Jedenfalls wird man, wenn man darüber hinausgeht, von der angenäherten Formel keine übertriebene Genauigkeit verlangen. Innerhalb dieser Grenzen kann man mit genügender Annäherung setzen: $\frac{ka}{\operatorname{tg} ka} = \frac{3{,}58}{\pi - ka} - 2{,}28$ [2]).

Es folgt:

$$f_a = \left(3{,}28 - \frac{3{,}58}{\pi - ka}\right) \xi = \left(3{,}28 - \frac{1{,}14}{1 - \frac{1}{\sqrt{n_a}}}\right) \xi .$$

Aus der Formel (1) leitet man nun folgenden Ausdruck ab:

$$1 = \frac{3{,}28\, F - 1{,}14 \left[\frac{F_a}{1 - \frac{1}{\sqrt{n_a}}} + \frac{F_b}{1 - \frac{1}{\sqrt{n_b}}} + \frac{F_c}{1 - \frac{1}{\sqrt{n_c}}}\right]}{F},$$

woraus schließlich:

$$\frac{F_a}{1 - \frac{1}{\sqrt{n_a}}} + \frac{F_b}{1 - \frac{1}{\sqrt{n_b}}} + \frac{F_c}{1 - \frac{1}{\sqrt{n_c}}} = 2\, F.$$

Dies entspricht der einfachen Knicksicherheit. Wir sagen, daß das System die Sicherheit μ aufweist, wenn die drei Stabkräfte (A), (B) und (C), mit μ multipliziert, gerade genügen, um das Ausknicken herbeizuführen. Nun ist aber n umgekehrt proportional der Kraft; demnach lautet die Bedingung für die Sicherheit μ:

$$\frac{F_a}{1 - \sqrt{\frac{\mu}{n_a}}} + \frac{F_b}{1 - \sqrt{\frac{\mu}{n_b}}} + \frac{F_c}{1 - \sqrt{\frac{\mu}{n_c}}} = 2\, F \quad . \quad . \quad (4).$$

Aus dieser Formel läßt sich nicht ohne weiteres der Wert der Unbekannten μ in einem algebraischen Ausdruck ableiten; aber die Berechnung mit dem Rechenschieber bietet keine Schwierigkeit und führt schon nach wenigen Versuchen zur Lösung. Dabei merke man sich, daß die Summe auf der linken Seite größer oder kleiner wird, je nachdem μ größer oder kleiner gewählt wird. Hat man zwei angenäherte Werte der Unbekannten ermittelt, so kommt man am besten durch Interpolation zum endgültigen Ergebnis.

Will man durch eine Aenderung der Abmessungen den Wert von μ ändern, so sollte man eigentlich alle drei Trägheitsmomente in gleichem Verhältnis zu- oder abnehmen lassen. Die Berechnung selbst zeigt aber, daß die drei Glieder dadurch sehr verschieden beeinflußt werden, so daß es nicht nötig ist, sich streng an dieser Regel zu halten.

Um einen Anhalt für die Abmessungen zu gewinnen, betrachten wir den besondern Fall, daß alle drei Stäbe in gleichem Grade gegen Knicken sicher sind; alsdann ist

$$n_a = n_b = n_c = n$$

und

$$ka = k'b = k''c.$$

In diesem Falle kann die Gleichung (3) nur dann befriedigt werden, wenn jedes der drei Glieder für sich null ist, denn sie haben alle das gleiche Vorzeichen. Dies bedingt die Beziehung

$$ka = k'b = k''c = \frac{\pi}{\sqrt{n}} = \frac{\pi}{2},$$

woraus $n = 4$. Soll die Knicksicherheit nicht ein-, sondern μ-fach sein, so ergibt sich:

$$\mu = \frac{n}{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Hiernach ist die Knicksicherheit des Systems ein Viertel der mittleren Knicksicherheit der drei Stäbe, vorausgesetzt, daß die drei betreffenden Werte nicht allzusehr voneinander abweichen.

Die folgenden Zahlenbeispiele werden über die Gültigkeit der beiden Annäherungsformeln (4) und (5) Aufschluß geben.

Während in den beiden ersten Fällen die Trägheitsmomente der drei Stäbe dem Bedarf angepaßt sind, ist dies in den Fällen 1 und 4 auch nicht angenähert zutreffend; aus den berechneten Werten von μ kann man ersehen, daß die hohe Steifigkeit eines oder zweier Stäbe nicht genügt, um die geringere Widerstandsfähigkeit der übrigen gut zu machen. Das letzte Beispiel betrachtet den Fall, wo die drei Trägheitsmomente unter einander gleich sind, wie es oft in der Praxis aus konstruktiven Rücksichten der Fall ist.

Beispiele.

		1	2	3	4	5
Stablängen in cm	a	300	wie im Fall 1	300	wie im Fall 3	200
	b	400		350		260
	c	600		500		460
Winkel in Grad	α	120°		125°		90°
	β	130°		135°		150°
	γ	110°		100°		120°
Flächen in qcm	$2\,F_a$	20,78		14,33		11,96
	$2\,F_b$	13,78		10,61		4,60
	$2\,F_c$	11,28		10,34		4,50
	$2\,F$	45,84		35,28		21,06
Kräfte in t	(A)	28,00		19,00		24,00
	(B)	24,77		16,40		12,00
	(C)	30,38		22,84		20,78
Trägheitsmomente in cm⁴	J_a	3000	1300	500	2800	2000
	J_b	3000	1300	500	2800	2000
	J_c	10 000	4300	12 600	1300	2000
Knicksicherheit der einzelnen Stäbe	n_a	25,26	10,95	6,21	34,75	44,20
	n_b	16,06	6,96	5,28	29,57	52,30
	n_c	19,40	8,34	44,59	4,83	9,65
Mittelwert	n	20,24	8,75	18,69	23,05	35,38
Knicksicherheit des Systems	nach Gl. (5)	5,06	2,19	4,67	5,76	8,84
	» » (4)	5,025	2,16	1,84	2,46	5,11
	» » (3)	5,02	2,17	1,83	2,46	5,33

Schlußbemerkungen.

Wie aus diesen Zahlen hervorgeht, ist die Gleichung (5) nur so lange brauchbar, wie das Verhältnis zwischen zwei Werten der einzelnen Knicksicherheiten nicht größer als etwa 1,6 ist; die Gleichung (4) ist dagegen für die vorkommenden Verhältnisse immer zuverlässig.

Es ist zweckmäßig, alle drei Glieder für gleiche Knicksicherheit zu bemessen.

Mit Rücksicht auf die sehr ungünstige Voraussetzung von Kugelgelenken in A, B und C dürfte eine 3,5- bis 4 fache Sicherheit genügen; d. h. die drei Stäbe sollten eine 14- bis 16 fache Sicherheit aufweisen, was ohne Schwierigkeit erreicht werden kann, wenn das ganze System doppelwandig ausgeführt wird.

Der mittlere Knotenpunkt ist jedenfalls mit aller Sorgfalt auszuführen.

Berlin. L. Vianello.

[1]) Wenn die ganze Biegungslinie des Stabes in Betracht kommt, ist es wohl zulässig, sie durch eine Parabel zweiten oder vierten Grades zu ersetzen; hier würde dieses Verfahren wegen des unrichtigen Wertes von $\frac{dy}{dx}$ beim Punkt O zu einem groben Fehler führen.

[2]) Zwischen $n = 2$ und $n = 81$ überschreitet der Fehler nicht 1 vH.