

COURS  
DE  
STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS

COURS

DE

# STABILITÉ DES CONSTRUCTIONS

PAR

A. VIERENDEEL

Professeur à l'Université de Louvain  
Ingénieur en chef, Directeur du Service Technique de la Flandre Occidentale  
Ancien Chef de Service des Ateliers de Construction de La Louvière  
Lauréat du Prix du Roi pour l'Architecture Métallique

---

TOME III

PONTS CONTINUS — PONTS TOURNANTS

---

TEXTE

LOUVAIN  
IMPRIMERIE DES TROIS ROIS  
(Société anonyme)

A. UYSTPRUYST, Directeur,

PARIS

V<sup>ve</sup> CH. DUNOD

49, Quai des Grands Augustins, 49

1901

# PONTS CONTINUS - PONTS TOURNANTS



## CHAPITRE I

### THÉORIE ANALYTIQUE DES POUTRES CONTINUES

#### § 1. Considérations Générales

**1. Poutres encastrées.** — Nous avons constaté en étudiant les pièces à une travée (voir Tome II) que l'encastrement complet ou partiel aux extrémités de la travée donnait une économie de matière à égalité de résistance, malheureusement dans le cas d'une seule travée l'économie sur le métal de la poutre est généralement absorbée

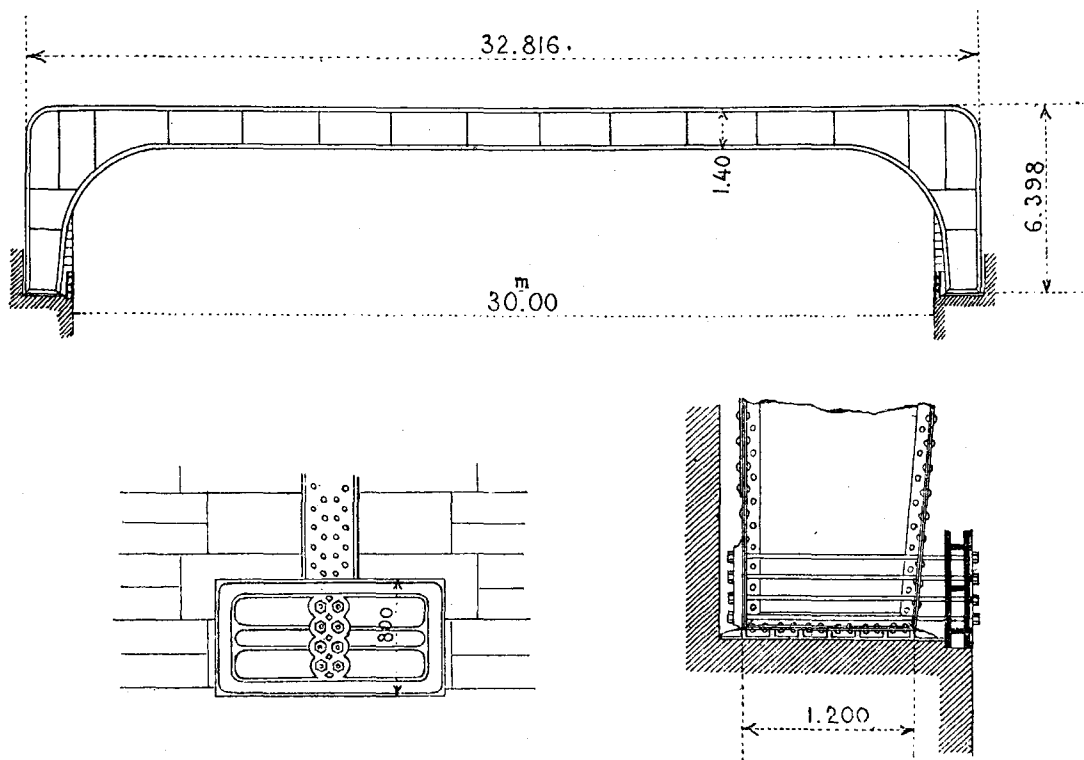


FIG. I.

et au-delà par le coût supplémentaire de la maçonnerie des appuis, aussi la poutre encastrée à une seule travée ne se rencontre guère; dans le cas de plusieurs travées solidaires le supplément de coût des

appuis n'existe pas car ce sont les travées elles-mêmes qui se faisant contrepoids réalisent tout naturellement l'encastrement, l'économie de métal est dans ce cas une économie réelle qui n'est pas contrebalancée par un coût plus élevé des maçonneries, c'est ce qui a fait le succès des poutres solidaires, autrement dit *poutres continues*; une autre cause de leur succès est la possibilité de la mise en place par lançage.

Nous ne connaissons qu'un seul exemple de pont encastré à une seule travée, c'est celui de 30 mètres construit il y a une quarantaine d'années dans la commune de *Gironde* sous la ligne de *Bordeaux à Cette* (FIG. 1), l'encastrement est produit par un retour d'équerre qui vient buter contre la culée et dont le pied est solidement ancré sur la maçonnerie, ce dispositif donne une certaine invariabilité, donc un certain encastrement, à la section du coude où commence la travée horizontale (1). Cette application est restée unique, toutefois le type de la FIG. 1 vient de renaître sous l'aspect FIG. 2, où les deux coudes

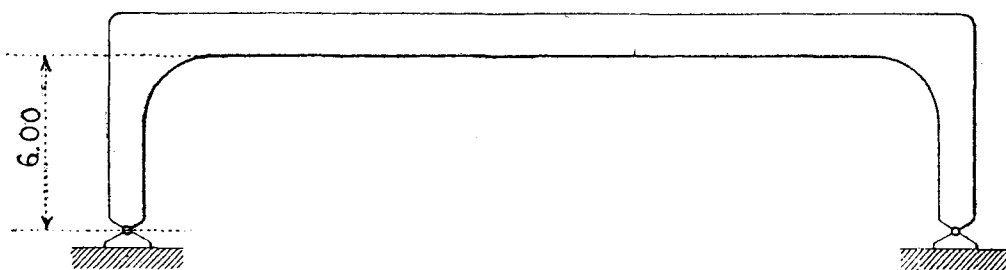


FIG. 2.

forment deux palées solidaires de la poutre horizontale et portent par simples rotules sur la maçonnerie de fondation.

Un pont de ce système a été construit en 1893 en France et en 1898 à Heuvy à la sortie de la gare de Namur; il est à noter que le longeron de la FIG. 2 n'est plus à proprement parler un longeron droit encastré, c'est un longeron polygonal qui doit se calculer par les formules des pièces polygonales (voir notre Tome V).

Le système de la FIG. 2 a été étendu à des poutres continues reposant sur plusieurs palées solidaires, FIG. 3 :

(1) *Traité pratique de la construction des Ponts et Viaducs métalliques*, par *Regnault*, ingénieur des Ponts et Chaussées, Paris, Dunod, 1870, p. 107.

Nous n'étudierons pas ici les poutres du type de la FIG. 1 ou 2, ni les poutres continues du type FIG. 3, nous renvoyons à notre tome V et aux mémoires ci-après :

*Revue Générale des Chemins de Fer*, Décembre 1893, Mémoire de MM. Guillaume et Vallat.

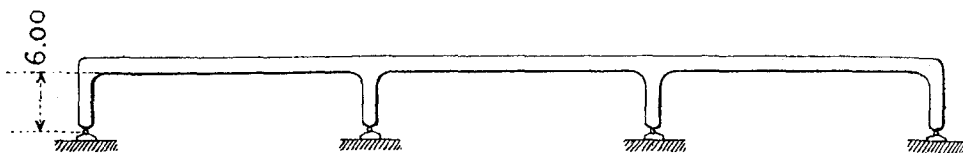


FIG. 3.

*Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils de France*, Février 1895, p. 248, Mémoire de M. Chaudy.

*Annales de l'Association des Ingénieurs sortis des Ecoles spéciales de Gand*, tome XX, 4<sup>e</sup> livraison, 1897, Mémoire de M. Keelhoff.

Nous nous limiterons dans notre Tome III actuel à l'étude des poutres continues ordinaires reposant sur des appuis en maçonnerie.

\* \* \*

2. Nous supposons une poutre qui a été exécutée sur chantier de façon que son axe neutre soit droit, cette poutre a été ensuite posée sur des appuis dont les niveaux sont quelconques avec toutefois la restriction que leur dénivellation est maintenue dans les limites de la déformation élastique de la poutre, c'est-à-dire que celle-ci peut, en se déformant, venir en contact avec ces divers appuis sans que, en aucun point, quelles que soient les surcharges, la limite d'élasticité de la matière soit dépassée, cette réserve est essentielle car si cette limite était dépassée l'équation de l'élastique à laquelle nous allons devoir recourir ne serait plus applicable et toute la théorie tomberait.

Chaque appui donne une réaction inconnue, mais aussi chaque appui donne une équation exprimant que la flèche de la poutre au droit de cet appui est égale à sa dénivellation, d'où, avec les conditions statiques, autant d'équations que d'inconnues et par conséquent la possibilité de résoudre le problème ; cette marche toutefois est très longue et n'est plus suivie aujourd'hui ; la théorie des poutres continues a été notablement simplifiée par la découverte de la formule des trois moments dite *Formule de Clapeyron*.

\* \* \*

**3. Formule de Clapeyron.** — De l'ensemble des travées qui composent une poutre continue nous isolons deux travées consécu-

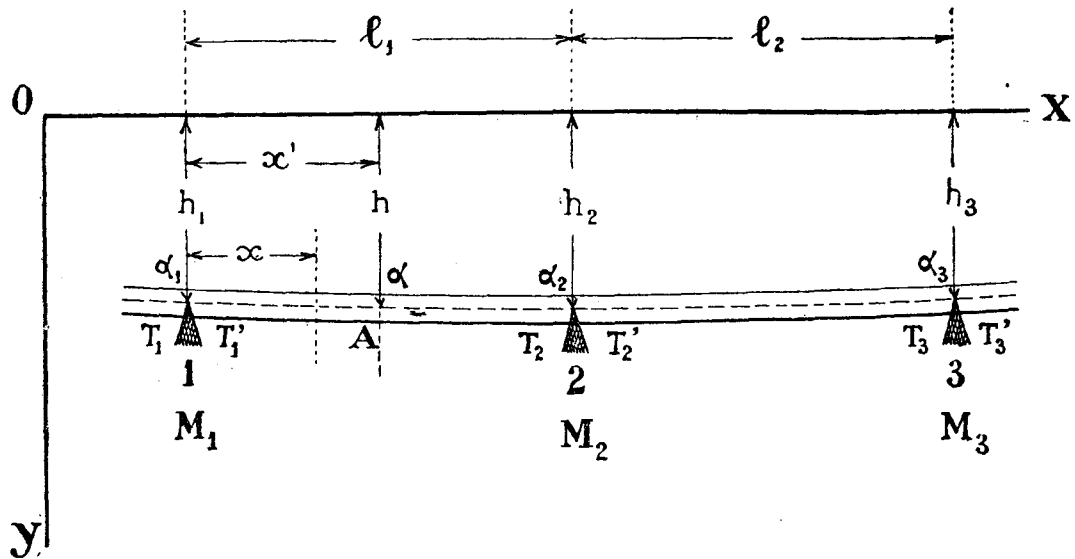


FIG. 4.

tives quelconques (FIG. 4) ; les appuis de ces travées sont numérotés 1, 2 et 3 ;  $l_1$  et  $l_2$  sont les longueurs de ces travées ; le moment d'inertie de la poutre est variable.

L'effet de toutes les forces appliquées à la poutre peut en une section quelconque de celle-ci être représenté par un moment fléchissant  $M$ , un effort tranchant  $T$  et un effort normal  $N$  ; nous avons en vue des ponts à axe droit horizontal avant déformation et soumis à des charges verticales, dans ces conditions l'effort  $N$  est quasi-nul et il n'y a aucune erreur pratique à le considérer comme tel.

Pour la section immédiatement à gauche de l'appui n° 1 le moment et l'effort tranchant sont représentés par  $M_1$  et  $T_1$ , pour celle immédiatement à droite par  $M_1$  et  $T_1'$  ; pour les appuis n° 2 et n° 3 les valeurs correspondantes sont données sur la figure.

Nous rapportons la poutre continue à deux axes coordonnés rectangulaires dont l'origine  $O$  est quelconque, l'axe des  $X$  est horizontal c'est-à-dire parallèle à l'axe de la poutre avant déformation, l'axe des  $Y$  est vertical.

$h_1$ ,  $h_2$  et  $h_3$  sont les ordonnées des appuis 1, 2 et 3.

$\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont les angles d'inclinaison de la fibre moyenne sur ces mêmes appuis.

Etudions la travée  $l_1$  et pour ce faire supposons que l'origine O des coordonnées soit sur la verticale de l'appui n° 1.

En une section quelconque de la poutre à la distance  $x$  de l'origine nous avons :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

qui peut se mettre sous la forme

$$d. \frac{dy}{dx} = \frac{Mdx}{EI}$$

or  $\left[ d. \frac{dy}{dx} \right]$  est l'angle de la section considérée et de celle infiniment voisine, de là il découle que l'inclinaison totale  $\alpha$  de la fibre neutre de la poutre en une section A a la distance  $x'$  de l'appui n° 1 a pour expression :

$$\alpha = \alpha_1 + \int_0^{x'} d. \frac{dy}{dx} = \alpha_1 + \frac{1}{E} \int_0^{x'} \frac{Mdx}{I}$$

et par conséquent :

$$(1) \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{E} \int_0^{l_1} \frac{Mdx}{I}$$

La variation de flèche en la section  $x'$  due à la variation angulaire en la section  $x$  a pour valeur :

$$(x' - x) d. \frac{dy}{dx} = (x' - x) \frac{Mdx}{EI}$$

d'où il résulte que la flèche totale  $h$  en  $x'$  a pour expression :

$$h = h_1 + \frac{1}{E} \int_0^{x'} \frac{M(x' - x)}{I} dx + \alpha_1 x'$$

et par conséquent :

$$(2) \quad h_2 = h_1 + \alpha_1 l_1 + \frac{1}{E} \int_0^{l_1} \frac{M(l_1 - x)}{I} dx$$

Si nous passons à la travée  $l_2$  et plaçons l'origine des coordonnées sur la verticale de l'appui n° 2 nous avons :

$$(3) \quad h_3 = h_2 + \alpha_2 l_2 + \frac{1}{E} \int_0^{l_2} \frac{M(l_2 - x)}{I} dx$$

éliminant  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  entre les trois égalités (1), (2) et (3) nous obtenons :

$$(4) \quad (h_3 - h_2) l_1 - (h_2 - h_1) l_2 = \frac{l_2}{E} \int_0^{l_1} \frac{M}{I} x dx + \frac{l_1}{E} \int_0^{l_2} \frac{M}{I} (l_2 - x) dx$$

Le moment fléchissant  $M$  en une section quelconque de la travée  $l_1$ , section à la distance  $x$  de l'appui n° 1 a pour expression :

$$(5) \quad M = + M_1 + T_1' x + \mu$$

$\mu$  est le moment des charges appliquées sur le tronçon de longueur  $x$ .

Le signe  $+$  dans l'expression (5) de  $M$  a une signification générale, il signifie  $\pm$ .

Pour  $x = l_1$  l'expression (5) devient :

$$(6) \quad M_2 = + M_1 + T_1' l_1 + \mu_2$$

$\mu_2$  est le moment par rapport à l'appui n° 2 de toutes les charges appliquées sur la travée  $l_1$ .

Eliminant  $T_1'$  entre (5) et (6) nous obtenons :

$$(7) \quad M = + M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l_1} x - \frac{\mu_2}{l_1} x + \mu$$

Nous obtiendrons de même pour la valeur de  $M$  en une section quelconque de la travée  $l_2$ , section à la distance  $x$  de l'appui n° 2 :

$$(8) \quad M = + M_2 + \frac{M_3 - M_2}{l_2} x - \frac{\mu_3}{l_2} x + \mu$$

Nous substituons (7) et (8) dans (4) :

$$(h_3 - h_2)l_1 - (h_2 - h_1)l_2 = \frac{l_2}{E} \int_0^{l_1} \frac{x dx}{I} \left[ M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l_1} x - \frac{\mu_2}{l_1} x + \mu \right] + \\ + \frac{l_1}{E} \int_0^{l_2} \frac{(l_2 - x) dx}{I} \left[ M_2 + \frac{M_3 - M_2}{l_2} x - \frac{\mu_3}{l_2} x + \mu \right]$$

Cette expression développée nous donne :

$$(9) \quad M_1 l_2 \left[ \int_0^{l_1} \frac{x dx}{I} - \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} \frac{x^2 dx}{I} \right] + M_2 \left[ \frac{l_2}{l_1} \int_0^{l_1} \frac{x^2 dx}{I} + l_1 \int_0^{l_2} \frac{(l_2 - x) dx}{I} - \right. \\ \left. - \frac{l_1}{l_2} \int_0^{l_2} \frac{(l_2 - x) x dx}{I} \right] + M_3 \frac{l_1}{l_2} \int_0^{l_2} \frac{(l_2 - x) x dx}{I} = + l_2 \int_0^{l_1} \left( \frac{\mu_2 x}{l_1} - \mu \right) \frac{x dx}{I} + \\ + l_1 \int_0^{l_2} \left( \frac{\mu_3 x}{l_2} - \mu \right) \frac{(l_2 - x) dx}{I} + E \left[ (h_3 - h_2)l_1 - (h_2 - h_1)l_2 \right]$$

ce qui est la formule de Clapeyron ou formule des trois moments dans toute sa généralité.

Dans le cas où la poutre est de section uniforme et où les appuis sont sur une même horizontale, la formule devient :

$$(10) \quad l_1 M_1 + 2(l_1 + l_2) M_2 + l_2 M_3 = 2l_1 \mu_2 - \frac{6}{l_1} \int_0^{l_1} \mu x dx + l_2 \mu_3 - \frac{6}{l_2} \int_0^{l_2} \mu (l_2 - x) dx.$$



La limite inférieure des intégrales est au point d'application de chaque charge.

Si la charge sur chaque travée est uniforme et la recouvre complètement, et si par unité courante nous la désignons par  $p_1$  sur la travée  $l_1$  et par  $p_2$  sur la travée  $l_2$ , nous avons pour la travée  $l_1$  :

$$\mu_2 = \frac{p_1 l_1^2}{2}$$

$$\mu = \frac{p_1 x^2}{2}$$

et pour la travée  $l_2$  :

$$\mu_3 = \frac{p_2 l_2^2}{2}$$

$$\mu = \frac{p_2 x^2}{2}$$

et la formule devient :

$$(11) \quad l_1 M_1 + 2(l_1 + l_2) M_2 + l_2 M_3 = \frac{p_1 l_1^3}{4} + \frac{p_2 l_2^3}{4}$$

qui est l'expression la plus simple de la formule de Clapeyron.

Moyennant cette formule le problème de la stabilité d'une poutre continue devient relativement aisé à résoudre.

Il importe dans l'application de la formule de Clapeyron de poser clairement la règle des signes pour les moments et les forces, et cette règle une fois posée de ne jamais la perdre de vue, en général on affecte du signe + les forces verticales dirigées vers le bas et les moments dont le sens de rotation est celui des aiguilles d'une montre, quant aux forces et moments inconnus on leur donne le signe + et c'est le signe du résultat qui définitivement indique leur sens.

## § 2. Etude d'un pont continu

**4. Détermination des M sur les Appuis.** — Soit un pont continu de  $n$  travées, chaque longeron repose sur  $(n+1)$  appuis ; en pratique les appuis sont toujours exécutés de niveau, on prend des précautions spéciales pour obtenir que les points 1, 2, 3, etc. (FIG. 4) de la ligne d'axe de la poutre soient sur une rigoureuse horizontale ; nous admettons, ainsi que généralement c'est le cas, que sur les appuis extrêmes ou culées le pont est sans encastrement et sans porte-à-faux.

Afin de simplifier l'étude des ponts continus on fait généralement les suppositions suivantes :

1° La section des longerons est uniforme d'un bout à l'autre.

2° Le poids mort est pris constant sur la longueur d'une même travée mais différent d'une travée à l'autre, et on remplace la surcharge par une charge uniforme équivalente.

3° On ne fait pour chaque travée que deux hypothèses de surcharge, la surcharge nulle et la surcharge recouvrant toute la travée, c'est-à-dire qu'on ne considère pas les cas de surcharges partielles.

Nous représentons par  $l_1 l_2 \dots l_{n-1} l_n$  les longueurs des travées et par  $p_1 p_2 \dots p_{n-1} p_n$  la valeur par unité courante (poids mort ou surcharge) des charges qu'elles portent; la poutre se présente ainsi que l'indique la FIG. 5.

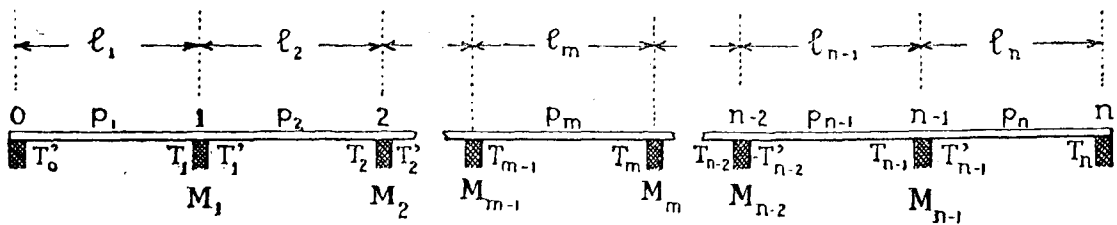


FIG. 5.

Nous appliquons l'équation (II) du n° 3 à chaque série de deux travées consécutives ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & 2(l_1 + l_2) M_1 + l_2 M_2 = \frac{I}{4} (p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3) \\
 & l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3) M_2 + l_3 M_3 = \frac{I}{4} (p_2 l_2^3 + p_3 l_3^3) \\
 & l_3 M_2 + 2(l_3 + l_4) M_3 + l_4 M_4 = \frac{I}{4} (p_3 l_3^3 + p_4 l_4^3) \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & l_{n-2} M_{n-3} + 2(l_{n-2} + l_{n-1}) M_{n-2} + l_{n-1} M_{n-1} = \frac{I}{4} (p_{n-2} l_{n-2}^3 + p_{n-1} l_{n-1}^3) \\
 & l_{n-1} M_{n-2} + 2(l_{n-1} + l_n) M_{n-1} = \frac{I}{4} (p_{n-1} l_{n-1}^3 + p_n l_n^3)
 \end{aligned}$$

Voilà  $(n-1)$  équations entre  $(n-1)$  inconnues  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{n-1}$ , équations qui généralement se résolvent en recourant à la méthode des coefficients indéterminés, pour ce faire on multiplie la 1<sup>re</sup> équation par

l'indéterminée  $\alpha_{n-1}$ , la suivante par  $\alpha_{n-2}$ , la troisième par  $\alpha_{n-3}$ ..... l'avant dernière par  $\alpha_2$  et enfin la dernière par  $\alpha_1$ , on additionne ensuite toutes les équations membre à membre ce qui donne :

$$(13) \quad M_1 [2(l_1 + l_2)\alpha_{n-1} + l_2\alpha_{n-2}] + M_2 [l_2\alpha_{n-1} + 2(l_2 + l_3)\alpha_{n-2} + l_3\alpha_{n-3}] + \\ + M_3 [l_3\alpha_{n-2} + 2(l_3 + l_4)\alpha_{n-3} + l_4\alpha_{n-4}] \dots\dots + M_{n-2} [l_{n-2}\alpha_3 + 2(l_{n-2} + l_{n-1})\alpha_2 + l_{n-1}\alpha_1] + \\ + M_{n-1} [l_{n-1}\alpha_2 + 2(l_{n-1} + l_n)\alpha_1] = \frac{I}{4}(p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3)\alpha_{n-1} + \frac{I}{4}(p_2 l_2^3 + p_3 l_3^3)\alpha_{n-2} \dots\dots + \frac{I}{4}(p_{n-1} l_{n-1}^3 + p_n l_n^3)\alpha_1.$$

On profite de l'indétermination des  $(n-1)$  facteurs auxiliaires  $\alpha_1$  à  $\alpha_{n-1}$  pour annuler les coefficients qui dans l'équation (13) affectent les moments  $M_2$  à  $M_{n-1}$ , cela donne  $(n-2)$  égalités :

$$(14) \quad \begin{aligned} l_2\alpha_{n-1} + 2(l_2 + l_3)\alpha_{n-2} + l_3\alpha_{n-3} &= 0 \\ l_3\alpha_{n-2} + 2(l_3 + l_4)\alpha_{n-3} + l_4\alpha_{n-4} &= 0 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ l_{n-2}\alpha_3 + 2(l_{n-2} + l_{n-1})\alpha_2 + l_{n-1}\alpha_1 &= 0 \\ l_{n-1}\alpha_2 + 2(l_{n-1} + l_n)\alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

qui renferment  $(n-1)$  indéterminées, mais on peut en éliminer une en posant par exemple  $\alpha_1 = 1$ , et alors les  $(n-2)$  égalités donnent :

$$(15) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= -2 \frac{l_{n-1} + l_n}{l_{n-1}} \\ \alpha_3 &= -2 \alpha_2 \frac{l_{n-2} + l_{n-1}}{l_{n-2}} - \frac{l_{n-1}}{l_{n-2}} \\ \alpha_4 &= -2 \alpha_3 \frac{l_{n-3} + l_{n-2}}{l_{n-3}} - \alpha_2 \frac{l_{n-2}}{l_{n-3}} \\ \vdots & \\ \vdots & \\ \alpha_{n-2} &= -2 \alpha_{n-3} \frac{l_3 + l_4}{l_3} - \alpha_{n-4} \frac{l_4}{l_3} \\ \alpha_{n-1} &= -2 \alpha_{n-2} \frac{l_2 + l_3}{l_2} - \alpha_{n-3} \frac{l_3}{l_2} \end{aligned}$$

Voilà donc tous les facteurs auxiliaires qui sont déterminés et cela d'une façon très-commode, les substituant dans l'équation (13) on en tire le moment  $M_1$  et remontant ensuite à la série des équations (12) on en déduit successivement les valeurs des divers moments  $M_2, M_3, \dots, M_{n-2}, M_{n-1}$  sur les appuis ; il est à remarquer que la dernière équation de la série (12) est une équation de condition.

On reconnaîtra facilement que les facteurs auxiliaires donnés par les équations (15) sont alternativement positifs et négatifs, que  $\alpha_2$  est négatif et plus grand que 2, et que les autres vont en croissant régulièrement à partir de  $\alpha_2$ .

Le calcul de ces facteurs doit se faire avec la plus grande exactitude car les erreurs pourraient s'accumuler et vicier considérablement les résultats définitifs.

\* \* \*

*Encastrement ou Porte-à-faux sur les appuis extrêmes.* — Si, sur les appuis extrêmes, il y a encastrement ou prolongement de la poutre en un porte-à-faux deux nouveaux moments  $M_0$  et  $M_n$  entrent dans les équations (12), donc on a  $(n + 1)$  inconnues pour les  $(n - 1)$  équations de la série (12), voici comment se trouvent les deux équations manquantes : s'il n'y a que simple porte-à-faux d'une longueur  $\lambda$  les deux moments  $M_0$  et  $M_n$  sont connus à priori car ils ont pour expression  $\frac{p\lambda^2}{2}$ ; s'il y a encastrement complet, nous appliquons à la première travée de la fig. 5 l'équation (2) du n° 3 dans laquelle  $\alpha_1$ ,  $h_1$  et  $h_2$  sont faits égaux à zéro, d'où :

$$\int_0^{l_1} M (l_1 - x) dx = 0$$

y remplaçant  $M$  en fonction de  $M_0$  et  $M_1$  conformément à l'égalité (7) et  $\mu$  en fonction de  $p_1$  on trouve pour la première travée :

$$(16) \quad 2 M_0 + M_1 = \frac{p_1 l_1^2}{4}$$

pour la dernière travée il faut combiner les équations (1) et (2) du n° 3 en éliminant  $\alpha_1$  ce qui donne :

$$(17) \quad h_2 = h_1 + l_1 \left( \alpha_2 - \frac{1}{E} \int_0^{l_1} \frac{M dx}{E} \right) + \frac{1}{E} \int_0^{l_1} \frac{M(l_1 - x)}{I} dx$$

et y faisant  $h_1$ ,  $h_2$  et  $\alpha_2$  égaux à zéro, on trouve :

$$\int_0^{l_1} M x dx = 0$$

y remplaçant  $l_1$  par  $l_n$  et  $M$  en fonction de  $M_{n-1}$ ,  $M_n$  et  $p_n$  on trouve :

$$(18) \quad M_{n-1} + 2 M_n = \frac{p_n l_n^2}{4}$$

et les deux équations (16) et (18) jointes à la série des équations (12) nous donnent  $(n + 1)$  équations pour les  $(n + 1)$  inconnues du problème.

Si, sur les culées, les encastremets au lieu d'être complets, ce qui correspond à  $\alpha_0$  et  $\alpha_n$  égaux à zéro, étaient partiels, les angles  $\alpha_0$  et  $\alpha_n$  auraient des valeurs connues et les relations (2) et (17) donneraient les deux nouvelles équations correspondant à la première et à la dernière travée, équations qui jointes à la série (12) permettent de déterminer les  $(n + 1)$  moments sur les appuis.

Si on voulait résoudre le problème de la détermination des moments sur les appuis dans le cas général de dénivellation, de variation de  $I$  et de charges locales, il faudrait appliquer l'équation (9) du n° 3.

\* \* \*

**5. Diagramme des Moments fléchissants.** — Ayant déterminé les moments sur les appuis on est à même de tracer le diagramme des moments fléchissants sur toute la longueur de la poutre ; l'équation (7)

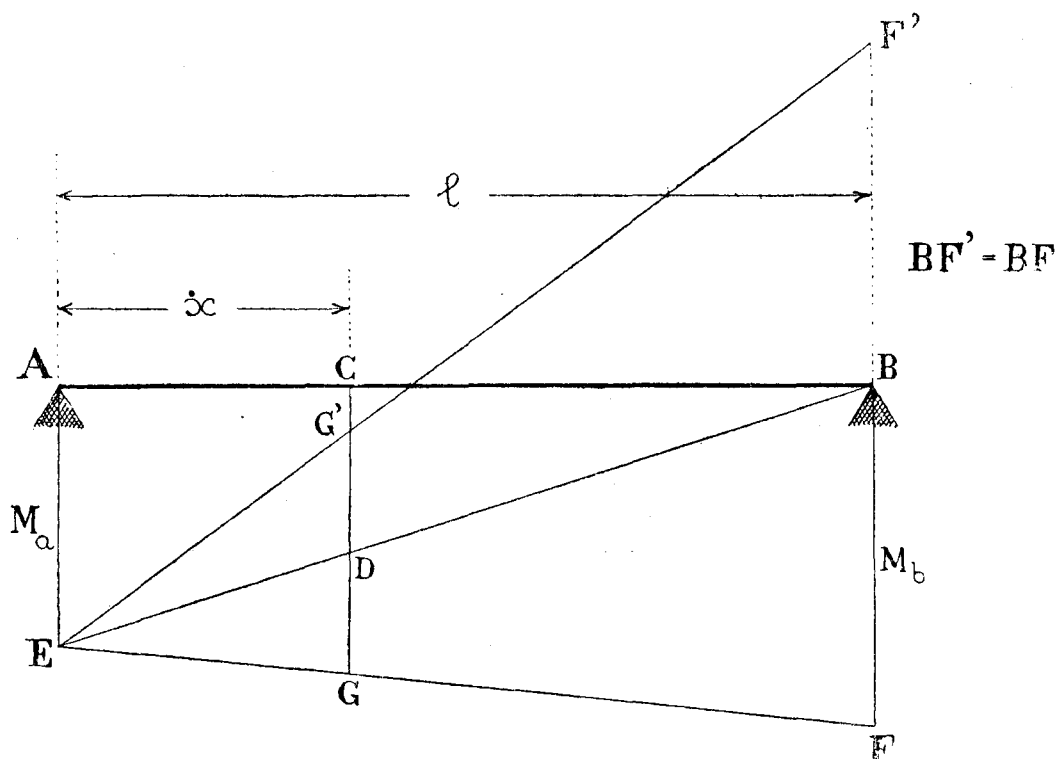


FIG. 6.

légèrement transformée nous donne pour une travée quelconque AB de longueur  $l$  (Fig. 6) :

$$M_x = M_a \frac{l-x}{l} + M_b \frac{x}{l} - \mu_b \frac{x}{l} + \mu_x$$

le second terme de l'expression de  $M_x$  est composé de quantités toutes connues et peut se construire graphiquement : le terme  $\left[ M_a \frac{l-x}{l} \right]$  a pour valeur CD,  $\left[ M_b \frac{x}{l} \right]$  a pour valeur DG si  $M_b$  a le même signe que  $M_a$ , il a pour valeur DG' s'ils sont de signe contraire ; donc le diagramme de

$$M_a \frac{l-x}{l} + M_b \frac{x}{l}$$

est la droite EF si  $M_a$  et  $M_b$  sont de même signe, ou la droite EF' s'ils sont de signes contraires.

On peut d'une façon analogue tracer le diagramme de

$$- \mu_b \frac{x}{l} + \mu_x$$

et additionnant les ordonnées de ce diagramme avec celles de EF ou EF' on obtient le diagramme des  $M_x$  sur la longueur de la travée  $l$ .

Supposons que la charge  $p$  soit uniformément répartie et recouvre toute la travée, nous avons :

$$- \mu_b \frac{x}{l} + \mu_x = - \frac{1}{2} p l x + \frac{1}{2} p x^2$$

dont le diagramme est la parabole ACB de la Fig. 7.

Nous supposerons que le diagramme des moments dûs à  $M_a$  et  $M_b$  soit EF, cela étant le diagramme de  $M_x$  s'obtiendra en portant les ordonnées de la parabole ACB à partir de la droite EF, prenant  $GH' = DH$  on a  $DH' = M_x$  et le lieu des points H' est la parabole EC<sub>1</sub>F dont les ordonnées prises par rapport à AB mesurent en grandeur et en signe les moments fléchissant  $M_x$  sur toute la longueur de la travée considérée.

L'équation de EC<sub>1</sub>F est :

$$M_x = M_a \frac{l-x}{l} + M_b \frac{x}{l} - \frac{1}{2} p l x + \frac{1}{2} p x^2$$

ou bien encore :

$$M_x = M_a - T'_a x + \frac{p x^2}{2}$$

équation qui indique une parabole à axe vertical, les points K et N où

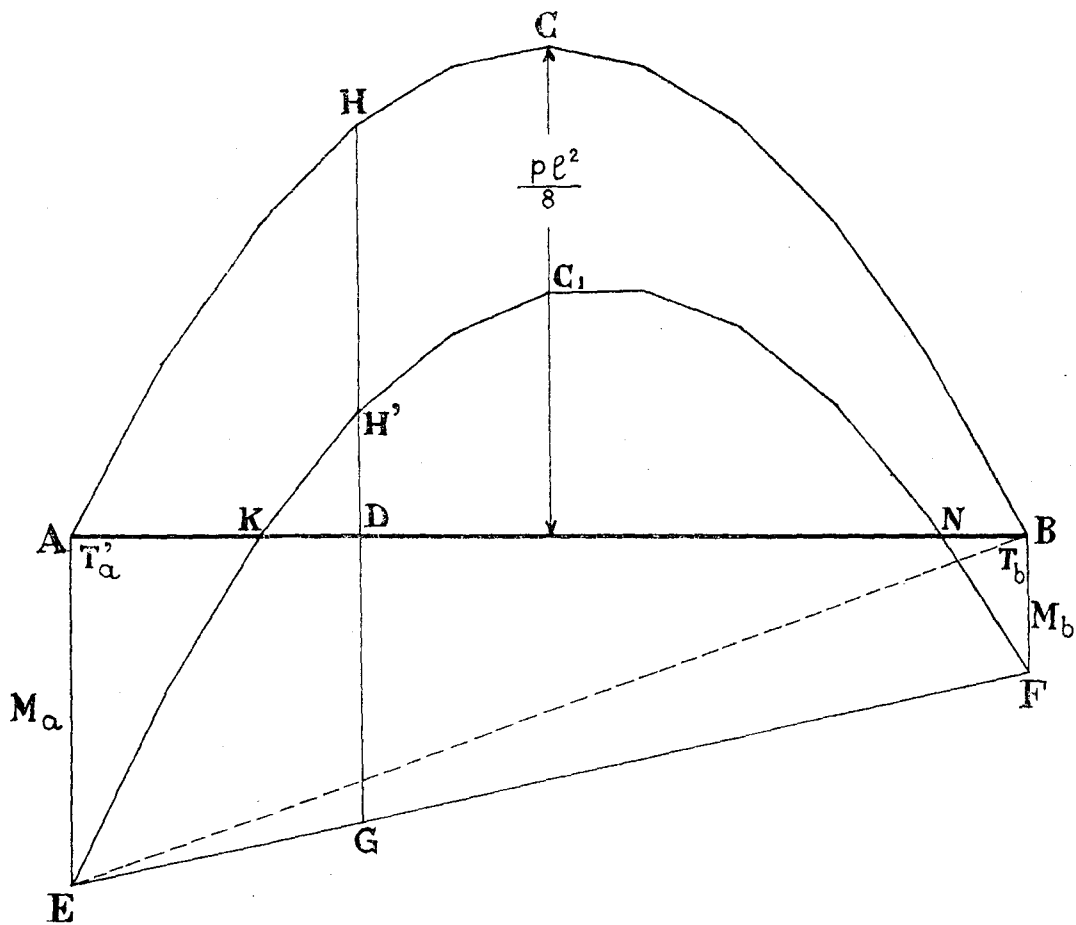


FIG. 7.

cette parabole coupe l'axe AB, c'est-à-dire les points où les moments sont nuls, ont pour abscisses :

$$x = \frac{I}{p} \left[ T'_a \pm \sqrt{(T'_a)^2 - 2p M_a} \right]$$

Le sommet de cette parabole a pour coordonnées :

$$x = \frac{T'_a}{p}$$

$$y = M_a - \frac{I}{2p} (T'_a)^2$$

si on transporte les axes coordonnés parallèlement à eux mêmes au sommet, l'équation de la parabole  $EC_1F$  devient :

$$y = \frac{I}{2} px^2$$

Le paramètre  $(\frac{2}{p})$  de cette parabole dépend donc uniquement de la charge portée par la travée et non de ses moments d'encastrement.

Pour l'ensemble des travées d'un pont, le diagramme des moments fléchissants se présente comme l'indique le FIG. 8.

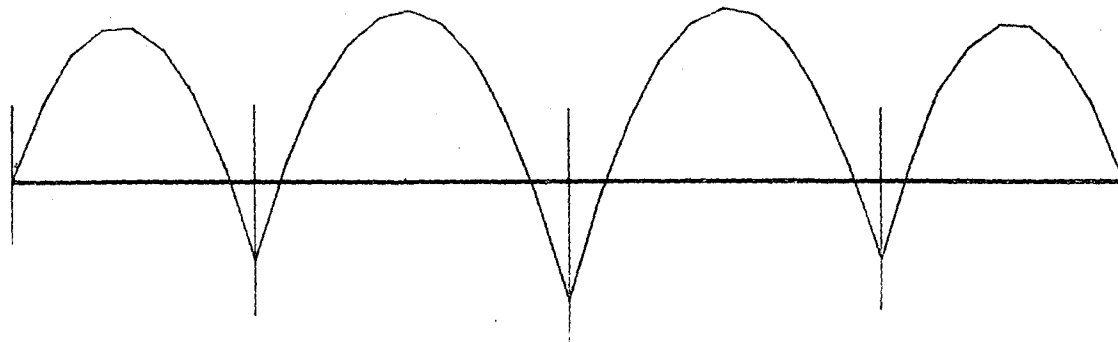


FIG. 8.

Si la charge  $p$  est la même pour les diverses travées toutes les paraboles pourront être tracées avec un même patron que l'on découpera dans une feuille de papier fort, on placera le sommet de ce patron (en maintenant son axe vertical) au point sommet de la parabole de chaque travée et un simple trait de crayon sur le pourtour du patron donnera le diagramme ; comme vérification on a que cette parabole doit passer par les points qui déterminent  $M_a$  et  $M_b$ , c'est-à-dire les points E et F de la FIG. 7, et aussi par les points K et N.

\* \* \*

**6. Détermination des Efforts Tranchants sur les Appuis et Diagrammes de ces efforts.** — L'équation (6) du n° 3 nous donne pour une travée quelconque AB (FIG. 7) :

$$T'_a = \frac{M_b - M_a}{l} - \frac{pl}{2}$$

d'où on tire  $T_x$  et par conséquent  $T_b$ , voilà donc connus les efforts tranchants sur toute la longueur de la travée.

Si la charge est uniforme et recouvre toute la travée on a :

$$T'_a = \frac{M_b - M_a}{l} - \frac{pl}{2}$$



et en la section quelconque D de la FIG. 7, section à la distance  $x$  de A, on a :

$$T_x = T'_a + px = \frac{M_b - M_a}{l} - p\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

et pour  $x = l$  on a :

$$T_b = \frac{M_b - M_a}{l} + \frac{pl}{2}$$

Nous connaissons donc  $T'_a$  et  $T_b$ , et nous voyons que de l'une à l'autre la variation de  $T_x$  se fait suivant les ordonnées d'une droite, généralement  $T'_a$  et  $T_b$  sont de signes contraires et la droite se présente comme l'indique la FIG. 9.

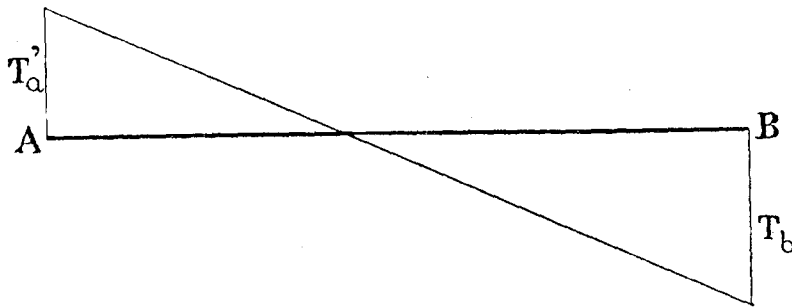


FIG. 9.

L'effort tranchant est nul pour  $x = \frac{T'_a}{p}$ , ce qui est précisément l'abscisse du sommet de la parabole des moments.

Pour un ensemble de travées, chacune portant une charge uni-

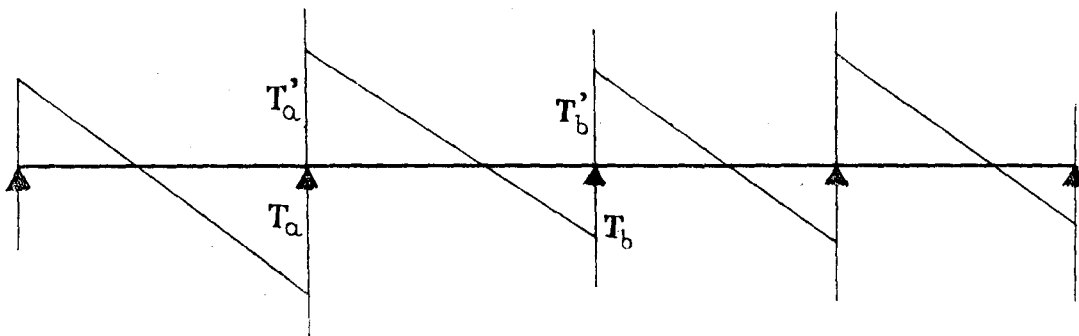


FIG. 9<sup>bis</sup>.

forme complète, le diagramme des efforts tranchants a l'aspect de la FIG. 9<sup>bis</sup>.

La réaction de chaque appui (ou la charge qu'il porte) a pour valeur  $(T_a + T'_a)$ .

### 7. Détermination des Maxima des M et T en chaque section.

— Nous voyons que connaissant les moments sur les appuis nous sommes à même de tracer l'ensemble des diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants, par conséquent de déterminer toutes les conditions de fatigue de la poutre continue, mais pour résoudre complètement le problème du pont continu il faut pouvoir en chaque section déterminer les maxima de M et T.

La recherche du maximum ne porte évidemment que sur la charge roulante car l'effet de la charge morte est unique et ne donne lieu qu'à un seul diagramme pour M et pour T, diagramme que nous sommes à même de tracer en suivant les principes ci-dessus ; voici un procédé approximatif pour la détermination de l'effet maximum de la charge roulante : on fait provisoirement abstraction de la charge morte et on suppose que la charge roulante vienne successivement occuper chacune des travées du pont, toutes les autres restant complètement libres, on trace les diagrammes de M et T dans chacun de ces cas, la somme des ordonnées de même signe de tous ces diagrammes et de celui de la charge morte donne très sensiblement le diagramme des plus grands maxima possibles en chaque section ; si pour le pont de la FIG. 5 ci-avant nous supposons que la travée n° m est seule chargée à raison de p kilogs par unité courante, la série des équations (12) se présente comme suit :

$$\begin{aligned} 2(l_1 + l_2) M_1 + l_2 M_2 &= 0 \\ l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3) M_2 + l_3 M_3 &= 0 \\ l_3 M_2 + 2(l_3 + l_4) M_3 + l_4 M_4 &= 0 \\ \dots &\dots \\ l_{m-1} M_{m-2} + 2(l_{m-1} + l_m) M_{m-1} + l_m M_m &= \frac{1}{4} p l_m^3 \\ l_m M_{m-1} + 2(l_m + l_{m+1}) M_m + l_{m+1} M_{m+1} &= \frac{1}{4} p l_m^3 \\ \dots &\dots \\ l_{n-1} M_{n-2} + 2(l_{n-1} + l_n) M_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

équations qui résolues donnent la série des moments sur les appuis et permettent donc de tracer les diagrammes des moments fléchissants et des efforts tranchants ; sous leur forme générale ces équations dévoilent certaines propriétés qui facilitent le tracé des diagrammes

et a priori en indiquent l'allure générale, ainsi la première équation nous donne :

$$M_2 = - M_1 \frac{2(l_1 + l_2)}{l_2}$$

résultat qui indique que les deux moments successifs  $M_1$  et  $M_2$  sont de signes contraires, et de plus que :

$$M_2 > 2 M_1$$

La seconde équation nous donne :

$$M_3 = - 2 M_2 \left[ 1 + \frac{l_2}{l_3} \left( 1 - \frac{l_2}{4(l_1 + l_2)} \right) \right]$$

ce qui encore dénote que  $M_3$  et  $M_2$  sont de signes contraires et que :

$$M_3 > 2 M_2$$

et ainsi de suite jusque la travée chargée ; si nous prenons la dernière équation de la série nous en tirons :

$$M_{n-2} = - M_{n-1} \frac{2(l_{n-1} + l_n)}{l_{n-1}}$$

ce qui indique que  $M_{n-1}$  et  $M_{n-2}$  sont de signes contraires et que :

$$M_{n-2} > 2 M_{n-1}$$

et ainsi de suite en remontant jusque la travée chargée ; ces résultats montrent que l'influence de la travée chargée décroît très rapidement à mesure qu'on s'en éloigne.

Sur les travées non chargées le moment  $M_x$  en une section quelconque a pour expression :

$$M_x = M_a \frac{l-x}{l} - M_b \frac{x}{l}$$

équation qui prouve que le diagramme des  $M_x$  est une droite inclinée sur l'axe de la poutre ; les points F (FIG. 10) où ces droites coupent l'axe de la poutre, c'est-à-dire les points où les moments sont nuls, se déterminent par l'équation :

$$M_x = 0 \text{ d'où } x = \frac{l}{1 + \frac{M_b}{M_a}}$$

Or nous venons de voir que le rapport  $\frac{M_b}{M_a}$  de deux moments consécutifs dans une travée non chargée est fonction des longueurs des travées et de rien d'autre, donc les points F dépendent uniquement de

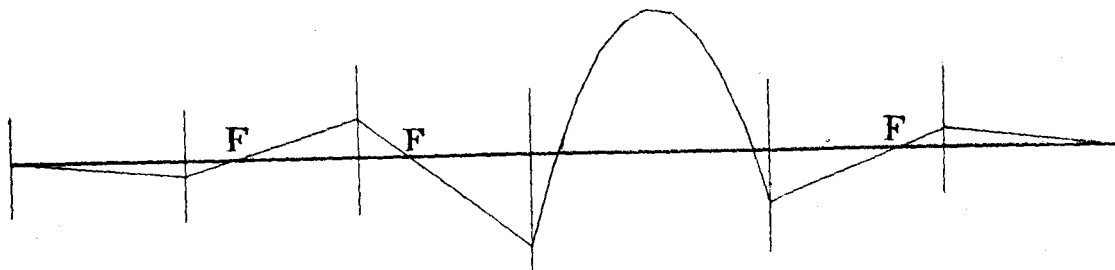


FIG. 10.

ces longueurs et ne sont influencés ni par la position de la travée chargée, ni par la valeur de la charge qu'elle porte, ces points sont donc fixes, on les nomme *Points fixes*, ou *Foyers* ou *Points d'inflexion*.

Dans chaque travée à gauche de celle chargée on a :

$$\frac{M_b}{M_a} > 2$$

l'équation ci-dessus nous donne

$$x < \frac{l}{3}$$

donc les points F sont dans le premier tiers de ces travées.

Pour celles à droite de celle chargée, les points F sont dans le dernier tiers.

Une travée pouvant se trouver successivement à droite et à gauche d'une autre chargée a donc deux foyers, chacun dans le tiers extrême, sauf cependant pour la première travée de gauche où le foyer se confond avec l'appui de gauche, car  $M_a = 0$  ce qui donne  $x = 0$ , et pour la première travée de droite où le foyer se confond avec l'appui de droite car  $M_b = 0$  ce qui donne  $x = l$ .

Les foyers une fois déterminés par l'équation :

$$x = \frac{l}{1 + \frac{M_b}{M_a}}$$

pour une position quelconque de la travée surchargée peuvent donc servir pour toutes les autres positions.

Nous indiquerons dans la partie traitant du calcul graphique des poutres continues un moyen de détermination directe des foyers.

Le diagramme de la travée chargée de  $p$  à la forme trouvée ci-avant au n° 5 et FIG. 7 ; en résumé donc le diagramme d'ensemble des moments fléchissants d'une poutre continue dont une seule travée est chargée est celui donné FIG. 10.

\* \* \*

L'effort tranchant dans la travée chargée a pour équation (voir n° 6) :

$$T_x = \frac{M_m - M_{m-1}}{l_m} - p\left(\frac{l_m}{2} - x\right)$$

ce qui est l'équation d'une droite inclinée sur l'axe de la poutre, voir FIG. 8.

Dans les travées non chargées, l'expression de l'effort tranchant est :

$$T_x = \frac{M_b - M_a}{l}$$

ce qui est une droite parallèle à l'axe de la poutre, droite alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe car comme nous venons de le voir  $(M_b - M_a)$  est alternativement positif et négatif. Le diagramme des efforts tranchants se présente donc comme donné par la FIG. 11.

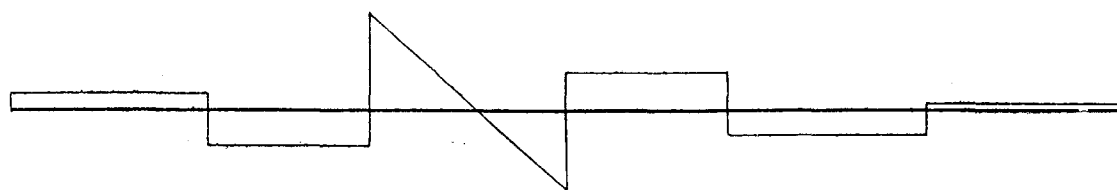


FIG. 11.

La différence  $(M_b - M_a)$  va en diminuant rapidement à mesure que l'on s'éloigne de la travée chargée, car nous avons vu que pour chaque travée :

$$M_a < \frac{1}{2}M_b$$

cet effet se traduit sur les diagrammes des M et des T (FIG. 10 et 11) par une rapide diminution des ordonnées, il montre que l'influence

de la travée chargée s'amointrit très rapidement à mesure que l'on s'en éloigne.

\* \* \*

**8. Diagramme des moments maxima.** — Pour déterminer les maximum des moments fléchissants on tracera sur une même feuille et en dessous les uns des autres :

1<sup>o</sup> Le diagramme de la charge morte, diagramme analogue à celui FIG. 8.

2<sup>o</sup> Le diagramme de la surcharge occupant la première travée, toutes les autres étant vides, ce diagramme sera analogue à celui FIG. 10.

3<sup>o</sup> Le diagramme de la surcharge occupant la seconde travée seule, puis la troisième seule..... et ainsi de suite pour chacune des travées.

On additionnera toutes les ordonnées positives des diagrammes du 2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup>, on obtiendra ainsi en vertu du principe de la superposition des effets le diagramme des moments maximum positifs que peut produire la surcharge, nous le désignerons en le nommant diagramme P ; on déterminera de même le diagramme des moments maximum négatifs de la surcharge, diagramme N.

On additionnera algébriquement le diagramme P avec celui du 1<sup>o</sup>, ce qui donnera un nouveau diagramme P' qui est celui des plus grands maximum positifs.

On fera de même pour le diagramme N et le 1<sup>o</sup>, ce qui donnera N' qui est le diagramme des plus grands maximum négatifs.

On superposera les diagrammes P' et N', et l'enveloppe de ces deux diagrammes sera le diagramme des plus grands maximum cherchés.

\* \* \*

Généralement les ponts continus sont symétriques par rapport à leur milieu, c'est-à-dire que la première moitié du pont est absolument semblable à la seconde, dans ce cas le tracé des diagrammes ne doit évidemment se faire que pour la première moitié, nous les donnons PL. I pour un pont à trois travées :

A est le diagramme de la charge morte.

B donne en 1 le diagramme de la surcharge recouvrant la première travée ; la ligne 3 est le prolongement de ce diagramme 1 sur la seconde moitié de la seconde travée et sur la troisième, cette ligne 3 ramenée sur la première travée et la 1<sup>re</sup> moitié de la seconde représente le diagramme de la surcharge sur la troisième travée ; la ligne 2 est le diagramme de la surcharge sur la travée du milieu.

En C nous avons deux diagrammes, celui supérieur P est la somme des moments positifs des divers diagrammes B, celui inférieur N est la somme des moments négatifs des B.

Il faut maintenant additionner algébriquement P et A, puis N et A, et enfin prendre l'enveloppe de ces deux nouveaux diagrammes et ce diagramme enveloppe sera celui des plus grands moments fléchissants pouvant se produire dans le pont étudié.

Il est à remarquer qu'il n'est pas nécessaire de faire l'addition  $(P + A)$  et  $(N + A)$  sur toute la longueur des diagrammes, en effet si on replie N sur P ainsi qu'il est fait en traits interrompus sur la figure C on constate que les points d'intersection *i* et *n* sont sur les verticales des points d'inflexion *b* et *d* du diagramme A, cela parce que la somme  $(P + N)$  donne A, sauf à tenir compte de la différence entre *p* poids mort et *p* surcharge, de là il résulte que sur la distance *ab* les moments positifs P l'emportent sur ceux négatifs N, sur *bd* ce sont les N qui l'emportent sur les P, sur *de* c'est P qui l'emporte sur N et par conséquent pour avoir le diagramme des plus grands maxima il suffit d'additionner les ordonnées du diagramme *ahimno* de la figure C avec les ordonnées du diagramme A, et on obtient ainsi le diagramme D qui est l'enveloppe cherchée.

\* \* \*

**9. Diagramme des efforts tranchants maxima.** — En ce qui concerne les efforts tranchants le signe ou sens des efforts a une grande importance, car là où il y a compression il faut se prémunir contre toute éventualité de flambage ; afin d'éviter toute erreur sur le sens des efforts il convient de tracer les diagrammes des efforts tranchants pour toutes les travées d'un pont, même dans le cas où celui-ci est symétrique.

Nous donnons PL. II en A le diagramme pour la charge morte, ce diagramme est accompagné de flèches qui indiquent le sens de

l'effort tranchant en supposant le tronçon de gauche supprimé et l'effort s'exerçant sur le tronçon de droite, ainsi en la section V de la figure A l'effort qui agit sur le tronçon VL est dirigé vers le haut, par réaction celui qui agit sur le tronçon VK est de même valeur mais dirigé vers le bas.

En B nous avons le diagramme pour la surcharge sur la première travée seule ; en C, le diagramme pour la surcharge sur la seconde ; en D, celui pour la surcharge sur la 3<sup>e</sup>.

Le tracé E donne l'enveloppe des plus grands maxima positifs et négatifs.

On remarque que vers la partie centrale des travées il y a un intervalle dans lequel une même barre peut selon le cas être sollicitée à la traction ou à la compression.

\* \* \*

**10. Détermination de la section des brides et des barres de treillis de la poutre continue.** — Nous sommes en possession des diagrammes des maxima, celui des moments fléchissants sert pour la détermination de la section des brides, celui des efforts tranchants pour la détermination de la section des barres de treillis.

La section de la poutre continue est en double té (FIG. 12) ou en caisson (FIG. 13), selon l'importance du pont.

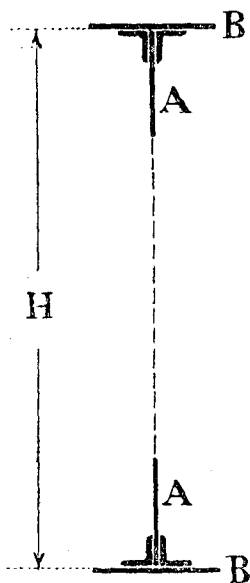


FIG. 12.

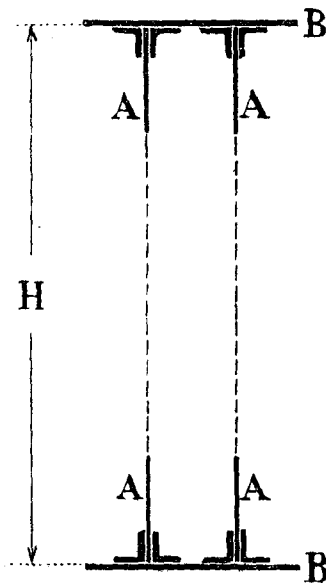


FIG. 13.

Les brides ne peuvent jamais avoir en dessous d'une section minimum imposée par la pratique, ce minimum se compose généralement des nervures verticales A, d'une tôle horizontale B formant table et des cornières réunissant A et B, il convient que les épaisseurs des plats et cornières ne soient pas inférieures à 8 millimètres. Soit  $\Omega$  la superficie de la section

minimum, le moment résistant minimum est  $t\Omega H$  kilogrammètres,