premières chambres et la partie cylindrique de 100 millimètres. Il est facile de voir qu'avec les cent divisions de la partie cylindrique, on jauge les deux petites chambres, et qu'avec celles-ci réunies on jauge la troisième, qui équivaut à deux cents divisions, et qu'enfin, avec les trois chambres et le tube cylindrique, on jauge la quatrième chambre, dont la capacité équivaut à cinq cents divisions. Il est bien entendu que la portion calibrée des petits tubes intermédiaires, qui est occupée par le mercure dans les calibrages de chaque chambre, est censée faire partie de la chambre à laquelle elle s'ajoute pour compléter l'égalité de volume. Les divisions restantes se comptent à part.

» Dans le thermomètre mis sous les yeux de l'Académie, l'espace de la glace fondante à l'eau bouillante occupe environ onze cents divisions qui, sur une tige ordinaire, feraient plus de 1 mètre, et chaque degré dans les parties cylindriques de la tige occupe environ 11 millimètres.

» Cette Note, dit M. Babinet, pourrait paraître tardive pour une réclamation de priorité. Je n'ai pas l'intention d'en élever; et, d'ailleurs, il est depuis longtemps à ma connaissance que M. Walferdin a employé à la graduation de pareilles chambres ou réservoirs des procédés de jaugeage qui, sans exiger la multiplicité des chambres, ne laissent rien à désirer du côté de la précision la plus rigoureuse. »

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

MÉCANIQUE. — *Suite au Mémoire lu le* 30 octobre 1843, *sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple ou à double courbure, en prenant simultanément en considération les divers efforts auxquels elles peuvent être soumises dans tous les sens; par* M. DE SAINT-VENANT, ingénieur des ponts et chaussées. (Extrait par l'auteur.)

(Commission précédemment nommée.)

§ VII. — *Applications des formules générales des* § V et VI.

« **19.** Le Mémoire du 30 octobre se composait de deux parties; j'ai donné (§ IV) divers exemples de l'application de la première partie, relative aux *conditions de résistance*, et j'ai montré les différences souvent considérables qu'offrent les résultats des formules nouvelles avec ceux des formules de l'ancienne théorie qui néglige plusieurs éléments.

» Aujourd'hui je donne des applications de la seconde partie (§ V et VI), relative au calcul des déplacements des points des pièces, ainsi qu'à la détermination des réactions et autres forces inconnues que la statique abstraite laisserait indéterminées. On remarquera encore (nos **22**, **23**, **24**) des différences très-fortes entre mes résultats et ceux des formules connues.

» **20**. Conservons les notations du n° **15** du Mémoire du 30 octobre; substituons pour D, F, T, dans les équations (16), les valeurs que l'on tire pour $\frac{\delta ds}{ds}$, $\frac{1}{ds}\delta\frac{ds}{\rho}$ et $\frac{1}{ds}\delta\frac{ds}{\tau}$ des équations (14); intégrons par parties les termes affectés de $d\varepsilon$; ceux sous le signe $\int$ qui resteront affectés de ε représenteront les moments des forces autour du rayon de courbure prolongé, car on a

$$\varepsilon = \rho\left(\frac{\mathrm{M}_v}{\mathrm{E}\mu'} - \frac{d}{ds}\frac{\mathrm{P}_u}{\mathrm{G}\omega}\right)\cos e - \rho\left(\frac{\mathrm{M}_u}{\mathrm{E}\mu} - \frac{d}{ds}\frac{\mathrm{P}_v}{\mathrm{G}\omega}\right)\sin e, \tag{17}$$

et $-\rho\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)$, $-\rho\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right)$, $-\rho\frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right)$ sont les cosinus des angles faits avec les axes coordonnés par ce prolongement du rayon de courbure. Donc, si l'on remarque que $\frac{\rho\mathrm{X}}{ds^3}$, $\frac{\rho\mathrm{Y}}{ds^3}$, $\frac{\rho\mathrm{Z}}{ds^3}$ sont les cosinus des angles faits de même par la perpendiculaire au plan osculateur, et si l'on appelle

» α_u, $\mathit{6}_u$, γ_u les angles formés avec les x, les y, les z par l'axe principal Mu de la section;

» α_v, $\mathit{6}_v$, γ_v les angles formés de même par l'axe principal Mv, les équations (16) prendront cette forme :

$$\left\{\begin{aligned} &d\xi = \frac{\mathrm{P}_l}{\mathrm{E}\omega}dx + \mathfrak{Y}dz - \mathfrak{Z}dy, \qquad d\eta = \frac{\mathrm{P}_l}{\mathrm{E}\omega}dy + \mathfrak{Z}dx - \mathfrak{X}dz,\\ &d\zeta = \frac{\mathrm{P}_l}{\mathrm{E}\omega}dz + \mathfrak{X}dy - \mathfrak{Y}dx, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

en faisant

$$\frac{4\mu\mu'}{\mu+\mu'} = 2\mu'', \tag{19}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} &\int\left[\frac{\mathrm{M}_l}{2\mathrm{G}\mu''}\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\mathrm{M}_u}{\mathrm{E}\mu} - \frac{d}{ds}\frac{\mathrm{P}_v}{\mathrm{G}\omega}\right)\cos\alpha_u - \left(\frac{\mathrm{M}_v}{\mathrm{E}\mu'} - \frac{d}{ds}\frac{\mathrm{P}_u}{\mathrm{G}\omega}\right)\cos\alpha_v\right]ds = \mathfrak{X},\\ &\int\left[\frac{\mathrm{M}_l}{2\mathrm{G}\mu''}\frac{dy}{ds} + \left(\frac{\mathrm{M}_u}{\mathrm{E}\mu} - \frac{d}{ds}\frac{\mathrm{P}_v}{\mathrm{G}\omega}\right)\cos\mathit{6}_u - \left(\frac{\mathrm{M}_v}{\mathrm{E}\mu'} - \frac{d}{ds}\frac{\mathrm{P}_u}{\mathrm{G}\omega}\right)\cos\mathit{6}_v\right]ds = \mathfrak{Y},\\ &\int\left[\frac{\mathrm{M}_l}{2\mathrm{G}\mu''}\frac{dz}{ds} + \left(\frac{\mathrm{M}_u}{\mathrm{E}\mu} - \frac{d}{ds}\frac{\mathrm{P}_v}{\mathrm{G}\omega}\right)\cos\gamma_u - \left(\frac{\mathrm{M}_v}{\mathrm{E}\mu'} - \frac{d}{ds}\frac{\mathrm{P}_u}{\mathrm{G}\omega}\right)\cos\gamma_v\right]ds = \mathfrak{Z}. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

» Ces formules, qui ramènent aux quadratures la recherche des petits déplacements, seront faciles à appliquer dans tous les cas particuliers. On choisira toujours, sur chaque section, les demi-axes principaux des u, v positifs, de manière que le prolongement du rayon de courbure passe dans leur angle. Une remarque servira encore à éviter les erreurs de signe; outre qu'elle donne une vérification de nos formules, c'est que les divers termes qui entrent dans la composition des quantités désignées par $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ représentent de petites rotations des éléments de l'axe de la pièce autour des x, y, z, en vertu de l'action des forces.

» **21**. Appliquons-les d'abord au cas général où la courbe d'axe de la pièce est plane et reste dans le même plan en changeant de forme. Il faut, pour cela, si x et y sont les coordonnées dans son plan, que l'on ait

$$M_t = 0, \quad M_v = 0, \quad P_u = 0, \quad \cos \alpha_u = 0, \quad \cos \beta_u = 0.$$

Il en résulte

$$\cos \gamma_u = 1, \quad \cos \alpha_v = -\frac{dy}{ds}, \quad \cos \beta_v = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \gamma_v = 0,$$

$$\mathfrak{X} = 0, \quad \mathfrak{Y} = 0, \quad \mathfrak{Z} = -\frac{P_v}{G\omega} + \int \frac{M_u}{E\mu} ds;$$

d'où

$$(21) \qquad \begin{cases} d\xi = \frac{P_t}{E\omega} dx + \frac{P_v}{G\omega} dy - dy \int \frac{M_u}{E\mu} ds, \\ d\eta = \frac{P_t}{E\omega} dy - \frac{P_v}{G\omega} dx + dx \int \frac{M_u}{E\mu} ds. \end{cases}$$

» Je suis arrivé à ces dernières formules, en 1837, par d'autres considérations (*). Si on les réduit à leurs derniers termes, $-dy \int \frac{M_u}{E\mu} ds$, $dx \int \frac{M_u}{E\mu} ds$, on a celles qui ont été données pour la première fois par M. Navier (2^e^ édit., n° 447) pour les petites flexions des pièces courbes planes.

» Passons aux applications plus particulières.

» **22**. *Pièce rectangulaire encastrée par un bout et sollicitée à l'autre par une force* P *perpendiculaire à sa longueur* a *et au côté* b *de sa base.*— Soient c l'autre côté et x la distance de l'encastrement à un point quelconque de l'axe de la pièce; les formules (21) donneront, eu égard à ce que, pour

(*) *Voir* les feuilles lithographiées de mon Cours, offertes à l'Académie en 1838.

$x = 0$, on doit avoir $\frac{d\eta}{dx} = g'_0 = \frac{P}{G\omega}$,

$$d\xi = 0, \quad d\eta = \frac{P}{G\omega}dx + dx\,\frac{P\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)}{E\mu};$$

d'où

$$\eta = \frac{Px}{G\omega} + \frac{P}{E\mu}\left(a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

La flèche de courbure, ou la valeur de η pour $x = a$, sera, en mettant pour ω, μ, G, leurs valeurs bc, $\frac{1}{12}bc^3$, $\frac{2}{5}E$,

$$f = \frac{4Pa^3}{Ebc^3}\left(1 + \frac{5}{8}\frac{c^2}{a^2}\right).$$

On voit ainsi que le glissement n'influe beaucoup sur la courbure que pour les pièces courtes.

» Mais, dans ces pièces, il a une influence beaucoup plus considérable sur la flèche de courbure que sur les *conditions de résistance* (n° **8**); car la proportion de cette influence est mesurée par $\frac{5}{8}\frac{c^2}{a^2}$; en sorte qu'elle est,

pour $c = 3a$,	0,07 ou	7 pour 100;
$c = 2a$,		16 pour 100;
$c = a$,		62 pour 100.

Il convenait donc d'avoir un moyen de faire entrer le glissement dans le calcul des flexions comme dans celui des conditions de résistance.

» **23.** *Même pièce lorsque la force* P *qui la sollicite est oblique aux côtés de la base* (*supposés inégaux*). — Alors, ainsi qu'on l'a vu au Mémoire du 30 octobre, la pièce ne saurait fléchir dans le plan où elle est sollicitée à le faire. Les formules (18), (20) apprennent dans quel sens aura lieu sa flexion; elles donnent, en appelant φ l'angle que fait la force avec le côté c :

$$d\eta = \mathfrak{z}\,dx = dx\int\frac{P\sin\varphi\,(a-x)}{E\mu'}dx,$$
$$d\zeta = -\mathfrak{Y}\,dx = dx\int\frac{P\cos\varphi\,(a-x)}{E\mu}dx.$$

Intégrant de manière que pour $x = 0$ on ait

$$\eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad \frac{d\eta}{dx} = -g'_0 = -\frac{P_u}{G\omega}, \quad \frac{d\zeta}{dx} = -g''_0 = -\frac{P_v}{G\omega},$$

on obtient

$$\eta = \frac{P \sin \varphi}{G\omega} x + \frac{P \sin \varphi}{E \mu'} \left(a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), \quad \zeta = \frac{P \cos \varphi}{G\omega} x + \frac{P \cos \varphi}{E\mu} \left(a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right);$$

ce qui donne pour les projections dans les deux sens de la flèche de courbure f, pour cette flèche elle-même, et pour l'angle ψ qu'elle fait avec l'axe des z, parallèle au côté c :

$$f_y = \frac{4P\, a^3 \sin \varphi}{E\, b^3 c}, \; f_z = \frac{4P\, a^3 \cos \varphi}{E\, b\, c^3}, \; f = \frac{4P\, a^3}{Ebc} \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{b^4} + \frac{\cos^2 \varphi}{c^4}}, \; \operatorname{tang} \psi = \frac{c^2}{b^2} \operatorname{tang} \varphi.$$

» L'ancienne théorie ne prenait qu'un seul moment autour d'une droite perpendiculaire à P, et passait sous silence l'autre moment qui n'est cependant pas nul pour les forces intérieures, ce qui donnait ces résultats erronés :

$$f = \frac{4Pa^3}{Ebc\,(b^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi)} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \psi = \operatorname{tang} \varphi.$$

Le rapport des tangentes des angles ψ données par la formule nouvelle et par la formule ancienne est, comme l'on voit, $\frac{c^2}{b^2}$, ou 1,44, 2, 4 et 9 quand le rapport $\frac{c}{b}$ des deux côtés est successivement 1,2, 1,41, 2 et 3, ce qui fait, comme l'on voit, des différences considérables.

» On voit aussi que, dans le cas où par exemple $\varphi = \frac{1}{4}\pi = 45$ degrés, le rapport de la flèche réelle à la flèche donnée par l'ancienne théorie est 1,185, 1,825, 3,56, le rapport des côtés étant successivement 1,41, 2 et 3.

» **24.** *Pièce horizontale encastrée* (voyez n° **22**), *le poids* P *étant distribué uniformément sur sa longueur. Influence de la pression latérale des fibres.* — Cette pression, que j'ai désignée par π_u aux n^{os} **3** et **9**, a pour valeur $\frac{P}{ab}$ sur une des faces, et zéro sur la face opposée ; supposons qu'elle varie à peu près proportionnellement à l'ordonnée v, on aura $\pi_u = \frac{P}{2ab} + \frac{P}{abc} v$; il faudra ajouter $\frac{P}{abc}$ à $\frac{M_u}{E\mu}$ dans les formules ci-dessus. Donc on a pour la flèche de courbure :

$$f = \frac{2a^3 P}{Ebc^3} \left(1 + \frac{5}{8} \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{2a^2} \right).$$

Le terme $\frac{5}{8}\frac{c^2}{a^2}$ est l'influence du glissement, et le terme $\frac{c^2}{2a^2}$ l'influence de la pression latérale. On voit que ces deux causes produisent des effets à peu près égaux.

» **25.** *Anneau circulaire, posé verticalement, et fléchi dans son plan par un poids* 2P *placé sur son sommet.* — Nous ne pouvons considérer, comme à l'ordinaire, les forces extérieures qui agissent sur la pièce depuis un point déterminé jusqu'à l'une des extrémités, car la pièce est *sans fin.* Il faut donc se borner à une portion de la pièce, par exemple, à un quart de cercle compté à partir de son sommet, et recourir à la méthode du § VI pour exprimer le moment inconnu des réactions de la partie inférieure de l'anneau.

» Soient donc $B_z + Px$ le moment total, autour d'un point M du quart d'anneau, de ces forces dont la résultante est $-$ P;

» a le rayon de l'anneau;

» t l'angle formé par le rayon mené au point M et par le diamètre vertical;

» $x = a \sin t$, $y = a \cos t$ les coordonnées de M par rapport à la tangente au sommet et au même diamètre.

» On aura, en négligeant l'influence du glissement et celle de la contraction longitudinale, qui ne sont sensibles que lorsque l'épaisseur de l'anneau est considérable,

$$d\xi = -\frac{a \sin t\, dt}{E\mu}\int (B_z + Pa \sin t)\, a dt, \qquad d\eta = \frac{a \cos t\, dt}{E\mu}\int (B_z + Pa \sin t)\, a dt.$$

L'intégrale $B_z a t - Pa^2 \cos t +$ const. doit s'anéantir pour $t = 0$ et $t = \frac{1}{2}\pi$, car $\frac{d\eta}{dt}$ doit être nul au sommet, et $\frac{d\xi}{dt}$ à l'extrémité du diamètre horizontal. Ces deux conditions aux limites donnent

$$\text{const.} = Pa^2, \qquad B_z = -\frac{2}{\pi} Pa.$$

Substituant et intégrant de nouveau, on trouve des expressions générales des déplacements ξ, η dont il résulte, pour l'élargissement horizontal et pour l'aplatissement vertical de l'anneau,

$$\text{élargissement} = \frac{Pa^3}{E\mu}\left(\frac{4}{\pi} - 1\right), \qquad \text{aplatissement} = \frac{Pa^3}{E\mu}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right).$$

Le premier est les 0,82, et le second les 0,89 de la flèche de courbure d'une pièce droite encastrée, d'une longueur égale au rayon, sollicitée perpendiculairement par le même poids P.

» On calculerait de la même manière la flexion d'un ressort de dynamomètre fermé et sans articulation, comme celui de Régnier.

» **26.** *Anneau horizontal, cambré par des forces verticales.* — Soit a le rayon de cet anneau; supposons qu'il soit posé sur deux appuis aux extrémités A, A' de l'un de ses diamètres, et sollicité par deux poids P aux extrémités B, B' d'un autre diamètre perpendiculaire au premier.

» Soient x, y les coordonnées, parallèlement à ces deux diamètres, d'un point M du quart d'anneau AB;

» t l'angle du rayon en M avec le diamètre A'A.

» Les moments, autour de parallèles aux x et aux y menées par le point M, des réactions inconnues de la partie de l'anneau au delà du point B, seront (§ VI) exprimées par

$$aB_x + Py, \qquad aB_y - Px.$$

» Donc, si l'on prend pour axe des u le prolongement du rayon, on a, comme $x = a\cos t$, $y = a\sin t$,

$$M_t = -aB_x \sin t + aB_y \cos t - Pa, \quad M_u = aB_x \cos t + aB_y \sin t;$$

d'où

$$\xi = 0, \quad \eta = 0,$$

et, en négligeant le glissement,

$$(22)\left\{\begin{aligned}\zeta = a^3 C'' &+ \frac{a^3}{2G\mu''}\left[B_x\left(\frac{t\sin t}{2} + \cos t\right) + B_y\left(\frac{\sin t}{2} - \frac{t\cos t}{2}\right) - Pt\right]\\ &+ \frac{a^3}{E\mu}\left[B_x\frac{t\sin t}{2} + B_y\left(\frac{\sin t}{2} - \frac{t\cos t}{2}\right)\right] + Ca^3\sin t - C'a^3\cos t.\end{aligned}\right.$$

» Les cinq constantes B_x, B_y, C, C', C'' auront des valeurs différentes, suivant les circonstances où l'on supposera placées les extrémités A, B du quart d'anneau que nous considérons.

» 1°. S'il y avait encastrement en A, et fente de l'anneau ou liberté complète en B, on aurait

$$\text{Pour } t = \tfrac{1}{2}\pi: \quad M_t = 0, \quad M_u = 0; \qquad \text{et pour } t = 0: \quad \zeta = 0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

» Mais il faut une cinquième équation de condition; ce sera celle qui exprimera l'immobilité des points de la section au point d'encastrement A. Pour la poser, il faut recourir à la considération du déplacement angulaire ε du rayon de courbure sur cette section. Son expression générale (17) se réduit, pour notre anneau, à

$$\varepsilon = -\frac{a^2}{E\mu}(B_x \cos t + B_y \sin t),$$

ou à $\frac{Pa^2}{E\mu}$ au point A, puisque les deux premières équations de condition donnent

$$B_x = -P, \quad B_y = 0.$$

Il faut donc exprimer que le rayon de courbure, après les déplacements, fait l'angle $\frac{Pa^2}{E\mu}$ avec sa direction primitive, c'est-à-dire avec l'axe des x. Or les cosinus des angles du rayon de courbure avec les x, y, z, avant les déplacements des points d'une courbe quelconque, sont exprimés (quand la différentielle ds de l'arc est constante, ce que nous avons supposé presque toujours) par

$$\frac{d^2x}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}, \quad \frac{d^2y^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}, \quad \frac{d^2z^2}{\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2}}.$$

Ils ont, après les déplacements, des valeurs de même forme, mais en mettant

$$d^2x + d^2\xi, \quad d^2y + d^2\eta, \quad d^2z + d^2\zeta,$$

au lieu de d^2x, d^2y, d^2z. On tirera de là, pour la cinquième équation de condition,

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{Pa^3}{E\mu}, \quad \text{pour} \quad t = 0;$$

d'où, pour les cinq constantes,

$$B_x = -P, \quad B_y = 0, \quad C = C'' = \frac{1}{2G\mu''}, \quad C' = 0,$$

et par suite

$$\zeta = -\frac{Pa^3}{2G\mu''}\left(t - 1 + \cos t - \sin t + \tfrac{1}{2}t \sin t\right) - \frac{Pa^3}{E\mu}\cdot\tfrac{1}{2}t \sin t.$$

La flèche verticale au point de suspension B est

$$\frac{Pa^3}{2G\mu''}\left(\tfrac{3}{4}\pi - 2\right) + \frac{Pa^3}{E\mu}\cdot\tfrac{1}{4}\pi.$$

On voit quelles sont les quote-parts de la flexion ordinaire et de la torsion dans sa grandeur.

» 2°. Supposons que l'anneau ne soit que posé en A, mais qu'il ne soit pas fendu en B, et c'est là le cas le plus ordinaire de l'anneau. On aura la même chose que si le quart d'anneau AB était engagé à ces deux extrémités dans des étuis horizontaux où il pût tourner librement sur lui-même : on aura, pour les cinq conditions,

$$\text{Pour } t = \tfrac{1}{2}\pi:\quad M_l = 0,\quad \frac{d\zeta}{dt} = 0;$$

$$\text{Pour } t = 0:\quad M_l = 0,\quad \zeta = 0,\quad \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

» Déterminant les constantes en conséquence, on a, en substituant,

$$\zeta = -\frac{Pa^3}{2G\mu''}(t + 2\cos t - \sin t + t\sin t - 2)$$
$$-\frac{Pa^3}{E\mu}\left(\tfrac{1}{2}\cos t - \tfrac{1}{2}\sin t + \tfrac{1}{2}t\sin t + \tfrac{1}{2}t\cos t - \tfrac{1}{4}\pi\cos t + \frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\right).$$

La flèche de courbure au point de suspension sera

$$\frac{Pa^3}{2G\mu''}(\pi - 3) + \frac{Pa^3}{E\mu}(\tfrac{1}{2}\pi - 1),\quad \text{ou}\quad \frac{Pa^3}{E\mu}(\tfrac{7}{4}\pi - \tfrac{19}{4}),$$

quand $\mu = \mu''$, $G = \frac{2}{5}E$.

» 3°. Si l'anneau était encastré ou pincé horizontalement en A, sa section étant toujours libre de tourner sur elle-même en B, on aurait

$$\text{Pour } t = 0:\quad \zeta = 0,\quad \frac{d\zeta}{dt} = 0,\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{Pa^3}{E\mu}.$$

$$\text{Pour } t = \tfrac{1}{2}\pi:\quad \frac{d\zeta}{dt} = 0,\quad M_l = 0.$$

» 4°. S'il était aussi pincé horizontalement en B, sans que cela empêchât ce point de descendre, on aurait, en égard à la valeur de ε qui est nulle en B, $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0$ pour $t = \frac{1}{2}\pi$, au lieu de la cinquième condition du cas précédent.

» Nous ne développerons pas ici le calcul relatif à ces deux derniers cas de l'anneau. Il nous suffit de l'avoir pris pour exemple de la manière dont on exprimera, en général, les conditions aux limites des pièces.

» **27.** *Résistance à la rupture ou à l'altération de leur élasticité, des anneaux circulaires des* n^{os} **25** et **26**. — Les équations de cette résistance peuvent être posées facilement, conformément au § III, maintenant que la considération des déplacements nous a conduits, ainsi qu'il a été dit au § VI, à la détermination des moments des forces inconnues.

» **28.** *Ressort en hélice sollicité dans le sens de sa longueur.* — Soient

a le rayon du cylindre sur lequel l'*axe* hélicoïdal du ressort est enroulé;

P la force suivant l'axe du cylindre supposé vertical;

φ l'angle constant de l'hélice avec l'horizon avant son extension ou sa compression.

» Prenons l'axe du cylindre pour axe des z; appelons t l'angle formé avec le plan des xz par le rayon mené au point M, dont les coordonnées sont x, y, z, et regardons cet angle comme croissant de 2π à chaque spire. Prenons pour axe des v sur la section, le prolongement du rayon, nous aurons

$$x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad z = a\,\mathrm{tang}\,\varphi;$$

$$\cos\alpha_u = \sin\varphi\sin t,\quad \cos\beta_u = -\sin\varphi\cos t,\quad \cos\gamma_u = \cos\varphi,$$

$$\cos\alpha_v = \cos t,\quad \cos\beta_v = \sin t,\quad \cos\gamma_v = 0;$$

$$P_t = 0,\quad P_u = P\cos\varphi,\quad P_v = 0,\quad M_u = -Pa\sin\varphi,\quad M_v = 0,\quad M_t = Pa\cos\varphi;$$

d'où, en appelant α le raccourcissement $-\delta a = -\xi\cos t - \eta\sin t$ éprouvé par le rayon du cylindre, et C, C′, C‴, C$^{\mathrm{IV}}$, C$^{\mathrm{V}}$ des constantes

$$\zeta = C^{\mathrm{V}} + \frac{Pa\sin\varphi\,\mathrm{tang}\,\varphi}{E\omega}t + \frac{Pa^3}{\cos\varphi}\left(\frac{\cos^2\varphi}{2G\mu''} + \frac{\sin^2\varphi}{E\mu}\right)[t + C\sin t + C'(1-\cos t)];$$

$$\alpha = -\frac{Pa\sin\varphi}{E\omega} + Pa^3\sin\varphi\left(\frac{1}{2G\mu''} - \frac{1}{E\mu}\right)$$
$$+ \frac{Pa^3\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\cos\varphi}\left(\frac{\cos^2\varphi}{2G\mu''} + \frac{\sin^2\varphi}{E\mu}\right)[1 + Ct\sin t + C't(1-\cos t)] + C'''\cos t + C^{\mathrm{IV}}\sin t.$$

» Les cinq constantes dépendront des conditions variées qui peuvent être imposées aux extrémités du ressort. Celle C$^{\mathrm{V}}$ est nulle en supposant $\zeta = 0$ pour $t = 0$; les cinq autres n'affectent que des quantités périodiques qui s'annulent à des points déterminés de chaque spire. Si donc les points d'attache sont disposés de manière que l'hélice ne perde rien de sa régularité en s'étendant, tous les termes où entrent ces constantes doivent être supprimés, et l'on voit, 1° que l'allongement ζ est proportionnel à la longueur du ressort; 2° que son rétrécissement est constant. Et ces deux lois s'observeront toujours par approximation à une certaine distance des points d'attache, quels qu'ils soient.

» On voit que le *glissement*, qui influe, comme nous avons vu, sur les conditions de résistance du ressort à cause de l'inclinaison des sections sur l'axe héliçoïdal, n'a aucune influence sur les déplacements des points de cet axe. La dilatation longitudinale n'a généralement qu'une faible influence, en sorte qu'on peut supprimer les termes divisés par $E\omega$. Il reste

$$\zeta = \frac{Pa^3}{\cos\varphi}\left(\frac{\cos^2\varphi}{2G\mu''} + \frac{\sin^2\varphi}{E\mu}\right),$$

$$\alpha = \zeta \tang\varphi + Pa^3 \sin\varphi\left(\frac{1}{2G\mu''} - \frac{1}{E\mu}\right).$$

» Le second terme de cette expression du demi-rétrécissement α vient de ce que le ressort a éprouvé une petite rotation autour de l'axe de son cylindre, effet qui ne pourrait être combattu que par des forces horizontales.

» Si $\mu = \mu''$, $G = \frac{2}{5}E$, on a

$$\zeta = \frac{Pa^3}{E\mu\cos\varphi}\left(\tfrac{5}{4}\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right).$$

La flexion dominera si $\sin\varphi$ est considérable, et ce sera la torsion s'il est petit.

» **29.** C'est pour ce dernier cas, ou pour des hélices d'un *pas* très-faible, que M. Giulio a fait ses intéressantes expériences, consignées dans un Mémoire lu, le 11 juillet 1841, à l'Académie de Turin. Sa formule, dressée à priori par des considérations particulières à l'hélice et non applicables à des cas où l'angle ε n'est pas nul, revient à

$$\zeta = \frac{Pa^3}{E\mu\cos\varphi}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi};$$

elle n'est identique avec la mienne que pour $\cos\varphi = 1$.

» Si l'on ne supprime que la quatrième puissance de $\sin\varphi$, la formule de M. Giulio est

$$\frac{Pa^3}{E\mu}\left(\tfrac{5}{4} + \tfrac{15}{8}\sin^2\varphi\right),$$

et la mienne

$$\frac{Pa^3}{E\mu}\left(\tfrac{5}{4} + \tfrac{3}{8}\sin^2\varphi\right).$$

Ma formule représente donc un peu mieux que la sienne les résultats des expériences de ce savant, car il prend constamment $\cos\varphi = 1$ ou $\zeta = \frac{5}{4}\frac{Pa^3}{E\mu}$ pour y satisfaire.

» **30.** J'ai appliqué aussi les méthodes de ce Mémoire à la détermination de la répartition des charges sur les diverses pièces dont se compose un pont en charpente; je ne donne point ici les calculs assez compliqués relatifs à cette question importante : il suffit, pour le moment, d'avoir montré que ces méthodes s'appliquent à toutes les questions de résistance de pièces dont les points sont dans le cas d'éprouver des déplacements très-petits, sous l'action de forces quelconques, données ou non à priori. »

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Mémoire sur le magnétisme terrestre; par* M. **Aimé.** (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires, MM. Arago, Becquerel, Duperrey.)

« En 1841, l'Académie des Sciences m'ayant chargé d'entreprendre à Alger une série d'observations magnétiques, d'après un plan général proposé par la Société royale de Londres, des instruments identiques à ceux employés dans les observatoires anglais furent mis à ma disposition. Le Mémoire que je présente contient les résultats obtenus par un travail de dix-neuf mois consécutifs, et renferme toutes les séries d'observations simultanées dont les époques avaient été indiquées à l'avance par la Société royale. Comme il n'est pas possible de donner ici ces observations simultanées, malgré toute l'importance qu'elles peuvent avoir, je vais me borner à indiquer quelques résultats généraux, nécessaires pour bien faire connaître la force magnétique terrestre telle qu'elle existe aujourd'hui à Alger.