des mains chez l'homme, et que M. *Lacauchie* a depuis observées dans le mésentère des chats. M. Mayer a vainement cherché ces organes dans le mésentère chez d'autres carnassiers; mais quant à ceux des extrémités, il les a observés chez le blaireau et le renard.

M. **Soleil** met sous les yeux de l'Académie un microscope polarisant qu'il a construit d'après les dessins et sous la direction de M. *Amici*.

M. **Babinet** donne sur cet instrument les détails suivants :

« Le microscope polarisant de M. Amici, présenté par M. Soleil, offre le moyen de répéter toutes les expériences de polarisation sur de très-petits échantillons, et de reconnaître la structure des cristaux, les couleurs des verres trempés, comprimés, chauffés, courbés, etc. Avec l'addition d'un tuyau qui en fait une vraie lunette, où l'œil est placé près de l'objectif, et qui, par suite, possède un champ immense, on aperçoit d'un coup d'œil des systèmes d'anneaux très-écartés, par exemple ceux du mica ou de la topaze. L'instrument devient un utile auxiliaire pour des recherches impossibles avec tout autre appareil. Les expériences de Fresnel sur la polarisation circulaire avec les parallélipipèdes de verre s'y reproduisent très-commodément. Les anneaux colorés de toutes sortes, les hyperboles de compensation, les solutions cristallisées, les structures anormales, les systèmes organiques, enfin toutes les opérations où l'on doit explorer les propriétés des corps au moyen de la lumière polarisée, peuvent être facilement faites à la lumière du jour ou à celle d'une bougie. L'oculaire analyseur, qui est formé d'un simple rhombe de spath d'Islande, donnant à volonté les deux images complémentaires, est une heureuse innovation.

» Le microscope polarisant de M. Amici (car le nom de *polariscope* appartient exclusivement à l'utile appareil de M. Arago pour reconnaître les moindres traces de polarisation) est un vrai progrès dans la science expérimentale, et l'exécution de M. Soleil ne laisse rien à désirer. »

MÉCANIQUE. — *Note sur l'état d'équilibre d'une verge élastique à double courbure lorsque les déplacements éprouvés par ses points, par suite de l'action des forces qui la sollicitent, ne sont pas très-petits; par* M. DE **Saint-Venant.**

« **1.** M. Binet, et ensuite M. Wantzel, viennent de donner (*Comptes rendus* des 17 et 24 juin) les integrales des équations de la courbe élastique à double courbure provenant de la flexion et de la torsion d'une verge ou

d'une portion de verge cylindrique et primitivement droite, sollicitée à ses extrémités seulement. Ces intégrales s'appliquent à des déplacements des points aussi grands qu'on veut, pourvu, bien entendu, qu'ils n'aillent pas jusqu'à altérer l'élasticité de la matière. Elles supposent admis ce théorème de Poisson : « que le moment qui tend à produire la torsion (ou le moment op-
» posé qui y résiste dans l'état d'équilibre) est constant dans toute l'étendue
» de la verge. »

» D'un autre côté, j'ai donné, le 30 octobre et le 6 novembre 1843 (*Comptes rendus*, tome XVII), des équations et leurs intégrales, pour une verge élastique dont la forme primitive et le mode de sollicitation sont absolument quelconques et en tenant compte de plusieurs éléments nouveaux, mais seulement lorsque *les déplacements restent très-petits*, ce qui est le cas le plus ordinaire des applications.

» Je me propose dans cette Note :

» 1°. De donner les équations différentielles de l'état d'équilibre d'une verge élastique dans le cas le plus général et pour des déplacements quelconques de ses points ;

» 2°. De montrer dans quelles limites le théorème de Poisson est applicable, ainsi que les équations dont il l'a tiré.

» **2.** Soient, pour l'état primitif de la verge, ou avant les déplacements éprouvés,

x_0, y_0, z_0 les coordonnées rectangles, par rapport à trois plans fixes, d'un point M de l'*axe* de la verge, ou de la ligne courbe qui unit les centres de gravité des sections transversales, normales à ce même axe ;

s_0 la longueur de l'arc de la même courbe mesuré jusqu'en M ;

ρ_0 son rayon de courbure aussi en M ;

$\frac{ds_0}{\tau_0}$ l'angle de deux de ses plans osculateurs, en M et en un point à une distance infiniment petite ds_0 de M.

» Soient, pour l'état d'équilibre que l'on cherche à déterminer,

x, y, z, s, ρ et $\frac{ds}{\tau}$ les valeurs nouvelles des mêmes quantités, au même point matériel M de l'axe.

» Soient encore,

ω la section transversale passant par M ;

m un des points de cette section ;

$d\omega$ son élément en m;

u, v les coordonnées du point m, par rapport aux deux axes *principaux* Mu, Mv de la section;

$\mu = \int_0^\omega v^2 d\omega$, $\mu' = \int_0^\omega u^2 d\omega$ les moments d'inertie de ω autour de Mu, Mv, et $\mu'' = \frac{2\mu\mu'}{\mu + \mu'}$;

e l'angle formé primitivement, sur cette même section, par l'axe principal Mv avec le plan osculateur, du côté du prolongement du rayon de courbure ρ_0;

$e + \varepsilon$ l'angle formé de même, après les déplacements, par la ligne Mv et par le nouveau plan osculateur, en sorte que ε est *le déplacement angulaire du plan osculateur, ou du rayon de courbure* par rapport aux points matériels de la section ω;

M_x, M_y, M_z les trois sommes des moments, autour de trois lignes menées par M parallèlement aux coordonnées, de toutes les forces extérieures qui agissent, *dans le second état de la verge*, sur ses divers points entre la section ω et l'une de ses deux extrémités;

M_t, M_u, M_v les trois sommes des moments des mêmes forces autour, 1° d'une tangente à l'axe de la verge en M; 2° et 3° des axes principaux Mu, Mv de la section;

E et G les deux coefficients numériques connus, dits d'élasticité, par lesquels il faut multiplier la proportion de la *dilatation* (positive ou négative) et du *glissement transversal* des parties d'un corps élastique (*Compte rendu* du 30 octobre) pour avoir, par unité superficielle, les résistances intérieures opposées à ces mouvements $\left(\text{on a ordinairement } G = \frac{2}{5} E\right)$;

∂ la proportion de la dilatation au point m, dans un sens parallèle à l'axe;

ϖ la *torsion*, ou ϖds le petit angle dont ont tourné l'une devant l'autre, pendant les déplacements, la section ω et une autre section ω' faite à une distance ds de celle-ci.

» Concevons, entre les deux mêmes sections très-voisines ω et ω', la verge divisée en *fibres* ou en petites portions cylindriques parallèles ou presque parallèles à l'axe, selon que ces sections sont égales ou légèrement inégales. Considérons la fibre qui a pour base l'élément $d\omega$ dont le centre est en m.

» Comme les deux sections étaient primitivement deux plans dont les prolongements se coupaient à une distance de l'axe égale au rayon de courbure ρ_0, la longueur ds_0 de la fibre centrale était, à la longueur de la fibre dont nous parlons, comme ρ_0 est à ce même rayon augmenté de la distance du point m à une droite perpendiculaire à ρ_0, tracée par M sur la section. Or cette distance est

$$u \sin e + v \cos e;$$

donc la longueur de la fibre était dans l'état primitif

$$(1) \qquad ds_0 \left(1 + \frac{u \sin e + v \cos e}{\rho_0}\right).$$

Après les déplacements des points de la verge, les sections sont devenues légèrement obliques à l'axe, et se sont changées en deux surfaces gauches : nous tiendrons compte, tout à l'heure, de l'influence du gauchissement sur le moment de torsion, mais nous négligerons dans cette Note son effet, ainsi que celui de l'obliquité de l'axe, sur l'allongement des fibres. La longueur de la fibre après les déplacements aura donc une expression semblable à (1), ou

$$(2) \qquad ds \left[1 + \frac{u \sin(e + \varepsilon) + v \cos(e + \varepsilon)}{\rho}\right].$$

» On aura, pour la proportion de dilatation, l'excès de (2) sur (1) divisé par (1); mais, dans cette division, on peut réduire l'expression (1) à ds_0, car les dimensions transversales d'où dépendent u et v sont supposées toujours petites par rapport au rayon de courbure ρ_0. Nous négligerons aussi, pour simplifier, l'effet ordinairement peu considérable de la dilatation de la fibre centrale, ou nous remplacerons $\frac{ds}{ds_0}$ par 1. Nous aurons ainsi

$$(3) \qquad \partial = u \left[\frac{\sin(e + \varepsilon)}{\rho} - \frac{\sin e}{\rho_0}\right] + v \left[\frac{\cos(e + \varepsilon)}{\rho} - \frac{\cos e}{\rho_0}\right].$$

Nous supposerons encore que les pressions latérales des fibres les unes sur les autres sont nulles ou négligeables, en sorte que les fibres résistent à l'allongement comme si elles étaient isolées [*]. La résistance

[*] On tient compte facilement de toutes les quantités que nous négligeons ici, au moyen des considérations du Mémoire du 30 octobre, et du § IV de celui du 20 novembre. (*Comptes rendus*, tome XVII.)

de celle que nous considérons sera, d'après la définition même du coefficient E,

$$E\partial . d\omega. \tag{4}$$

» Quant à la torsion $\mathfrak{T}ds$, ou à la rotation relative de ω et ω', on l'exprimera si l'on considère que ε est la quantité dont la première de ces deux sections a tourné par rapport au plan osculateur en M, et que $\varepsilon + d\varepsilon$ est la quantité dont la seconde a tourné par rapport au plan osculateur mené à une distance ds de M; d'où il suit que si l'on ajoute à l'excès $d\varepsilon$ la quantité $\frac{ds}{\tau} - \frac{ds_0}{\tau_0}$, dont ces deux plans eux-mêmes ont tourné l'un par rapport à l'autre, on aura la rotation relative totale des deux sections. Donc, en négligeant toujours la différence entre $\frac{ds}{ds_0}$ et l'unité, on a

$$\mathfrak{T} = \frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0}. \tag{5}$$

» Cette quantité, multipliée par le coefficient G et par $2\mu'' = \frac{4\mu\mu'}{\mu + \mu'}$, devra être égale, pour l'équilibre, au moment M_t des forces extérieures, car les considérations présentées à ce sujet le 30 octobre et le 20 novembre s'appliquent facilement à des déplacements angulaires d'une grandeur quelconque. Les deux autres moments M_u, M_v des mêmes forces autour de Mu, Mv, devront être égaux respectivement aux moments, autour des mêmes axes, des résistances des fibres (4) pour tous les éléments $d\omega$. Substituant pour ∂ sa valeur (3), on aura ainsi, eu égard à ce que $\int_0^\omega uv\,d\omega = 0$, les trois équations d'équilibre

$$\left\{\begin{aligned} M_u &= E\mu \left[\frac{\cos(e+\varepsilon)}{\rho} - \frac{\cos e}{\rho_0}\right],\\ M_v &= E\mu' \left[\frac{\sin(e+\varepsilon)}{\rho} - \frac{\sin e}{\rho_0}\right],\\ M_t &= 2G\mu''\left[\frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0}\right]. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

» **3.** Si nous ajoutons les deux premières, multipliées respectivement par $\cos e$ et $\sin e$, et si, ensuite, nous retranchons la seconde, multipliée par $\cos e$ de la première, multipliée par $\sin e$, nous avons les deux suivantes, où l'angle ε se trouve moins engagé:

$$(7)\quad \frac{\cos\varepsilon}{\rho}=\frac{1}{\rho_0}+\frac{M_u}{E\mu}\cos e+\frac{M_v}{E\mu'}\sin e;\quad \frac{\sin\varepsilon}{\rho}=\frac{M_v}{E\mu'}\cos e-\frac{M_u}{E\mu}\sin e.$$

» On en élimine cet angle inconnu en élevant au carré et ajoutant; et, comme $d\varepsilon=\frac{d.\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}$, elles donnent aussi le moyen de l'éliminer de la troisième équation (6). On a ainsi ces équations, où ε ne se trouve plus :

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\rho^2}=\dfrac{1}{\rho_0^2}+\dfrac{2}{\rho_0}\left(\dfrac{M_u}{E\mu}\cos e+\dfrac{M_u}{E\mu'}\sin e\right)+\left(\dfrac{M_u}{E\mu}\right)^2+\left(\dfrac{M_v}{E\mu'}\right)^2,\\[2ex] \dfrac{1}{\tau}=\dfrac{1}{\tau_0}+\dfrac{M_l}{2G\mu''}-\dfrac{\dfrac{d}{ds}\cdot\rho\left(\dfrac{M_v}{E\mu'}\cos e-\dfrac{M_u}{E\mu}\sin e\right)}{\rho\left(\dfrac{1}{\rho_0}+\dfrac{M_u}{E\mu}\cos e+\dfrac{M_v}{E\mu'}\sin e\right)}.\\[2ex] \text{On a, de plus,}\qquad ds=ds_0. \end{array}\right.$$

» Ce sont les trois équations différentielles de l'intégration desquelles dépendra la détermination des coordonnées x, y, z d'un point quelconque de l'axe de la verge, après le déplacement de ses parties, en fonction de ses coordonnées primitives, ou de l'une d'elles, x_0 par exemple, ou d'une autre variable indépendante, telle que l'arc s_0. En effet, ρ, τ, ds, M_l, M_u, M_v s'exprimeront en fonction des coordonnées nouvelles que l'on cherche, de leurs différentielles des trois premiers ordres, et de ε qu'on en élimine à l'aide de l'équation (7), tandis que toutes les autres quantités s'exprimeront en fonction de la variable indépendante, au moyen de la connaissance que l'on a de la forme primitive de la courbe, et de la position initiale des axes principaux de ses sections.

» 4. Ces trois équations, simultanées du troisième ordre et non linéaires, se simplifient :

» 1°. Lorsque la section transversale est partout un cercle, un carré ou une autre figure dont tous les axes sont *principaux;* alors $\mu=\mu'=\mu''$, et comme on peut prendre pour axe Mv la direction primitive du rayon de courbure sur la section, on peut faire $e=0$; mais ε n'est pas nul, et les équations paraissent toujours difficilement intégrables.

» 2°. Lorsque la verge est primitivement droite. Alors $\frac{1}{\rho_0}=0$, et comme le plan osculateur primitif peut être choisi arbitrairement en chaque point, on peut prendre pour tel, d'un bout à l'autre de la verge, un même plan passant par son axe rectiligne, ce qui donne aussi $\frac{1}{\tau_0} = 0$; mais e subsiste ainsi que ε, et l'intégration paraît toujours difficile.

» Elles se simplifient bien davantage, ainsi que nous avons dit, quand les déplacements $x - x^0$, $y - y_0$, $z - z_0$ sont très-petits, ainsi que ε; alors on peut mettre les coordonnées anciennes au lieu des nouvelles dans les trois moments M; et comme les premiers membres deviennent linéaires, on obtient cette intégrale assez simple, où tout est exprimable en s ou s_0, choisi pour variable, et où (uy), (vy), (ly), (uz) (vz), (lz) représentent les angles des axes de M_u, M_v, M_l avec les y et les z [*]:

$$x - x_0 = \int \frac{dz_0}{ds} ds \int \left[\frac{M_u \cos(uy)}{E\mu} + \frac{M_v \cos(vy)}{E\mu'} + \frac{M_l \cos(ly)}{2G\mu''}\right] ds$$
$$- \int \frac{dy_0}{ds} ds \int \left[\frac{M_u \cos(uz)}{E\mu} + \frac{M_v \cos(uz)}{E\mu'} + \frac{M_l \cos(lz)}{2G\mu''}\right] ds.$$

On en a deux semblables pour $y - y_0$, $z - z_0$, d'où il suit que les déplacements s'obtiennent par les quadratures.

» **5.** Elles se simplifient encore beaucoup lorsque les deux circonstances (1°) et (2°) du numéro précédent se réunissent, c'est-à-dire lorsque la *verge est primitivement droite, et que la section a une figure pour laquelle tous les moments d'inertie μ sont égaux.*

» Alors, ce qu'il y a de plus commode est de choisir pour axe M_v la trace, sur chaque section, du plan osculateur de la courbe engendrée par les déplacements, ce qui donne $e + \varepsilon = 0$, et de prendre, comme on a déjà dit, un plan osculateur unique pour toute l'étendue de la verge dans son état primitif. Les angles disparaissent des deux premières équations (6), mais celui ε subsiste en tous cas dans la troisième.

» Alors ces équations différentielles, en faisant,

$$(9) \qquad 2G\mu\left(\frac{d\varepsilon}{ds} + \frac{1}{\tau}\right) = -\theta,$$

se réduisent à

$$(10) \qquad \frac{E\mu}{\rho} = M_u, \quad 0 = M_v, \quad -\theta = M_l.$$

Si on les multiplie respectivement par les cosinus des trois angles que for-

[*] Formules (18) et (20) du Mémoire du 20 novembre, en effaçant les éléments négligés ci-dessus.

ment, avec l'axe des x, la normale (Mu) au plan osculateur, le prolongement (Mv) du rayon de courbure, et la tangente à la courbe, et si on les ajoute ensuite, le second membre ne sera autre chose que le moment M_x des forces extérieures autour d'une parallèle aux x, menée par le point M; donc on a

$$(11) \qquad E\mu \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3} - \theta\frac{dx}{ds} = M_x.$$

Cette équation, et deux autres que l'on peut former de même pour les moments autour de parallèles aux y et aux z, sont celles de Lagrange, complétées au moyen de la théorie de M. Binet, qui a servi à y ajouter les seconds termes, et dont Poisson a tiré, en les différentiant et les ajoutant, son théorème $d\theta = 0$ ou $M_t =$ constante. Ce sont aussi les équations que MM. Binet et Wantzel ont intégrées lorsque μ est également constant, et que les forces qui entrent dans les seconds membres n'agissent qu'aux extrémités; leur analyse est bien applicable alors à la détermination de l'état d'équilibre de la verge, en y joignant l'équation (9).

» **6.** Mais, hors le cas un peu plus général énoncé au commencement de l'article 5, on peut dire que la *constante nullité du moment* M_v *des forces* [2[e] équation (10)] *autour du rayon de courbure* n'aura jamais lieu. Ce moment aura généralement une grandeur finie, tout comme le moment M_t autour de la tangente à la courbe d'axe, et le moment M_u autour de la normale au plan osculateur. Le théorème $M_t =$ constante, lié à $M_v = 0$, *n'aura donc lieu que dans ce cas-là* (où la pièce était primitivement droite, et où l'on avait $\mu = \mu'$), et les équations (10), (11) sont incomplètes dans tout autre cas.

» Si Poisson semble établir ce théorème et les équations (11) d'une manière générale, c'est qu'il omet, dans son analyse, ce troisième moment M_v, qui tend à fléchir une verge courbe transversalement à son plan osculateur actuel si elle était déjà courbe, et, par conséquent, à changer le plan de sa courbure. Lagrange n'avait fait attention qu'au moment M_u, qui tend à augmenter ou à diminuer la courbure dans son plan actuel, ce qui suffit pour les courbes planes restant planes. M. Binet y a ajouté le moment M_t, tendant à tordre, et cela suffit dans le cas particulier que nous venons d'énoncer, lorsqu'on ne cherche que les équations générales de l'*axe* de la verge; mais, dans le cas général où la verge à double courbure était primitivement courbe, ou bien où, l'axe étant rectiligne, la section n'a pas une des formes donnant $\mu=\mu'$, il est indispensable d'introduire aussi dans le calcul ce troisième moment M_v, perpendiculaire aux deux autres, et qui tend à plier la verge droite obliquement aux axes principaux de ses sections, ou à faire tourner le rayon de courbure sur le plan des sections de la verge courbe. Mais cela exige impérieusement que l'on introduise aussi l'angle ε qui mesure cette rotation et dont la prise en considération est nécessaire, en tous cas, pour déterminer les déplacements des points hors de l'axe, et pour fixer même la valeur de certaines constantes des équations définitives de l'axe. »

OPTIQUE. — *Observations de* M. AMICI *à l'occasion de la Lettre de* M. Ad. Matthiessen *insérée dans le* Compte rendu *de la séance du* 17 *juin* 1844.

« Quand M. le Secrétaire de l'Académie des Sciences lut, dans la séance du 17 juin dernier, quelques fragments d'une Lettre de M. Matthiessen, d'Altona, il parut que cette Lettre n'avait d'autre but que de protester contre une prétendue réclamation faite en ma faveur pour la priorité des idées qui l'ont dirigé dans la construction de ses objectifs microscopiques. Je déclarai verbalement que, n'ayant aucune connaissance des procédés suivis par M. Matthiessen, je n'avais aucun motif pour faire une réclamation. Mais, comme je trouve dans le *Compte rendu* de la séance la Lettre entière de M. Matthiessen, dans laquelle il fait entre mes microscopes et les siens des comparaisons qui me semblent inexactes, je suis obligé de vous prier de me permettre d'ajouter quelques lignes pour qu'on puisse juger de la valeur de ses observations et de ses assertions.

» J'ai encore été conduit à rédiger cette Lettre, par la considération que la Lettre de M. Matthiessen étant publiée dans un Recueil très-estimé et très-répandu, et avec une note qui apprend que j'étais présent à la séance, on pourrait croire à l'importance de la Lettre de ce savant, et interpréter mon silence comme une adhésion à toutes ses assertions.

» Dès l'année 1828, je m'aperçus que, lorsqu'on observe des objets microscopiques sous des verres d'épaisseurs diverses, la netteté des images varie beaucoup, si l'angle du cône lumineux est considérable.

» Je ne tardai pas à reconnaître la cause de cette aberration et à trouver différents moyens de la corriger. Mes microscopes et les Notes explicatives qui les accompagnent, existant dans les mains d'un grand nombre de savants, peuvent attester la vérité de ce que j'avance.

» Je donnai la préférence à l'un de ces moyens de correction, c'est-à-dire à celui qui consiste dans la superposition d'une quatrième lentille au-dessus des trois lentilles achromatiques composant l'objectif. Cette lentille devait avoir une forme variable avec l'épaisseur de la lame de verre et avec l'aberra-