M. DE GASPARIN fait hommage à l'Académie d'un exemplaire du troisième volume de son *Cours d'Agriculture* (1). (*Voir* au *Bulletin bibliographique.*)

MÉMOIRES LUS.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Mémoire sur l'équilibre des corps solides, dans les limites de leur élasticité, et sur les conditions de leur résistance, quand les déplacements éprouvés par leurs points ne sont pas très-petits; par* M. DE SAINT-VENANT.

(Commission précédemment nommée.)

« **1.** Les formules de la mécanique dite *moléculaire* ont été basées, jusqu'à présent, sur la supposition que les déplacements des divers points des corps élastiques auxquels on les applique sont extrêmement petits, de manière que la ligne de jonction de deux points quelconques ne change jamais que très-peu, non-seulement de longueur, mais encore de direction dans l'espace.

» Or il s'en faut bien que cette condition soit remplie en général : une lame mince peut être ployée de manière que ses deux bouts arrivent à se toucher, et un cylindre d'un faible diamètre peut être tordu de plusieurs circonférences sans que l'élasticité, ni de cette lame, ni de ce cylindre, ait subi d'altération.

» Il convient donc d'avoir des formules qui s'appliquent à des grandeurs absolument quelconques des déplacements, avec cette seule restriction, que les distances mutuelles de points très-rapprochés ne varient que dans une petite proportion, afin que la cohésion et l'élasticité naturelle subsistent.

» **2.** On y parvient en exprimant, au moyen des déplacements relatifs de deux molécules proches l'une de l'autre, le rapport de leur distance après à leur distance avant les déplacements, et en remarquant que, comme ce rapport doit différer très-peu de l'unité, on peut développer le radical qui le représente, en négligeant le carré et les puissances supérieures de la quantité qui s'y trouvait ajoutée à l'unité; en sorte que l'expression de la nouvelle distance est toujours finie ou rationnelle, ainsi que celle de ses projections. On en déduit, pour les six composantes de pression sur trois plans quelconques, des formules également finies et rationnelles en fonction des déplacements éprouvés.

---

(1) La présentation de ce volume avait été faite dans la séance du 15 février; c'est par suite d'un oubli qu'il n'en a pas été fait mention dans le *Compte rendu* de cette séance.

» Ces formules se simplifient en y introduisant les *dilatations* et les *glissements* en trois sens, c'est-à-dire : 1° les proportions $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ des allongements de trois petites lignes matérielles passant par un point M du corps, et primitivement parallèles aux coordonnées x, y, z ; 2° les petites diminutions g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} éprouvées par leurs angles primitivement droits. On a pour une dilatation ∂_x, et pour un glissement g_{yz}, en fonction des déplacements quelconques ξ, η, ζ de M dans des sens parallèles aux coordonnées,

$$\partial_x = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{2dx^2},$$

$$g_{yz} = \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} + \left(\frac{d\xi}{dy}\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\eta}{dy}\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\frac{d\zeta}{dz}\right),$$

expressions dont les secondes parties disparaissent lorsque ξ, η, ζ sont très-petits. Et l'on a toujours, pour la proportion de l'allongement d'une autre droite matérielle faisant primitivement les angles α, β, γ avec les axes,

$$\partial_x \cos^2\alpha + \partial_y \cos^2\beta + \partial_z \cos^2\gamma + g_{yz}\cos\beta\cos\gamma + g_{zx}\cos\gamma\cos\alpha + g_{xy}\cos\alpha\cos\beta,$$

d'où l'on déduit facilement que, lorsque les pressions sont prises sur les plans légèrement obliques dans lesquels se sont changés les trois plans matériels primitivement rectangulaires et parallèles aux coordonnées, on a, pour les six composantes, les mêmes expressions, en fonction des dilatations et des glissements, que lorsque les déplacements sont très-petits.

» Le problème de la recherche de déplacements de grandeur quelconque des points de corps élastiques sollicités par des forces données, est donc posé en équation.

» Mais comme, dans le cas même des petits déplacements où les équations sont linéaires, on recourt rarement à leur intégration pour la solution des problèmes, il convient à fortiori, pour des déplacements quelconques, de les remplacer par ces équations plus simples qui expriment l'équilibre entre les forces extérieures agissant sur les *pièces* allongées habituellement employées dans les constructions, et les pressions s'exerçant à travers une de leurs sections transversales, pressions dont on exprime approximativement les sommes de composantes et les sommes de moments en divers sens, en fonction des changements de la longueur et des courbures de l'axe de la pièce, des rotations des rayons de courbure par rapport aux points des sections, et des degrés d'inclinaison que prennent ces mêmes sections primitivement droites et planes (1).

» Comme ces diverses quantités ne dépendent que des déplacements

(1) *Comptes rendus*, 30 octobre, 6 et 20 novembre 1843; t. XVII, p. 942, 1020, 1180.

relatifs de points peu éloignés les uns des autres, il n'y a que des modifications faciles à faire subir aux expressions de composantes et de moments dits de flexion et de torsion, trouvées dans le cas des petits déplacements, pour les adapter aux cas de déplacements quelconques. J'ai déjà donné quelques-unes de ces modifications, et les intégrations, soit exactes, soit approximatives, de quelques-unes des équations d'équilibre des *pièces* (1), et je me propose d'en donner plus tard d'autres applications à des questions de pratique où l'on ne saurait calculer les déplacements comme très-petits. Aujourd'hui, je parlerai encore d'un élément nouveau qu'il convient d'introduire, en général, dans l'expression du moment de réaction de torsion des prismes.

» M. Cauchy a reconnu le premier que ce moment n'est pas, pour un prisme à base rectangle, proportionnel au moment d'inertie de la section autour de son centre, comme on le croyait d'après une théorie ancienne : la résistance à la torsion est d'autant moins forte, pour même moment d'inertie, que les deux côtés de la section rectangle sont plus inégaux. J'ai montré que la différence entre sa formule et la formule ancienne tenait à ce que l'établissement de celle-ci supposait que la section primitivement plane reste plane, tandis qu'elle prend la forme gauche d'une aile de moulin à vent, ses éléments étant sollicités à s'incliner par les *fibres* qui leur étaient primitivement perpendiculaires et qui s'inclinent elles-mêmes sur l'axe.

» Mais, en tenant compte de quelques termes de plus des séries données par M. Cauchy, on reconnaît, en outre, que la section, vers ses quatre angles, se ploie dans le sens de la torsion, de manière à rester exactement normale aux quatre arêtes du prisme devenues héliçoïdales. Et l'on voit facilement, à priori, que les choses doivent se passer ainsi. En effet, on suppose que le prisme quadrangulaire n'éprouve, sur ses faces latérales, d'autre pression que la pression atmosphérique : cette pression n'a point de composante parallèle aux faces où elle agit; or il résulte du théorème connu de réciprocité des composantes tangentielles de pression sur deux plans rectangulaires passant par un même point, que, vers les quatre angles, la pression intérieure, sur la section rectangle du prisme, a aussi des composantes nulles dans deux sens transversaux; donc elle agit, en ces points, perpendiculairement à la section, ce qui exige bien que les lignes matérielles primitivement normales à celle-ci soient restées normales, et que la section se soit inclinée, aux quatre angles, pour conserver cette normalité aux arêtes.

(1) *Comptes rendus*, 1er et 15 juillet 1844; t. XIX, p. 40, et *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1844; t. IX.

» Il suit de là que, outre le gauchissement précédemment signalé, dû à l'inégalité des deux dimensions transversales du prisme, il y a une deuxième espèce de gauchissement due aux angles saillants qu'offre la figure de la section. Le premier gauchissement aurait lieu seul pour une section elliptique, le second seul pour une section carrée; tous deux ont lieu pour une section rectangle, et ni l'un ni l'autre pour une section circulaire, qui, seule, reste plane après la torsion.

» Il en résulte aussi que, pour même moment d'inertie de la section, un prisme à base carrée doit résister moins à la torsion qu'un cylindre.

» C'est aussi ce qu'ont appris les expériences comparatives de Duleau (1) sur les résistances à la torsion des barres de fer carrées et des barres de fer rondes. La différence, qui a été trouvée d'un sixième pour même angle de torsion et pour même moment d'inertie, ne saurait s'expliquer par une différence de qualités de fers qui venaient des mêmes localités, ni par l'influence du forgeage : elle s'explique par la théorie ci-dessus.

» J'ai vérifié expérimentalement cette théorie d'une autre manière; j'ai soumis à la torsion deux prismes de caoutchouc, de 20 centimètres de longueur, l'un à base carrée, de 3 centimètres de côté, l'autre à base rectangle, de 4 centimètres sur 2. Les lignes droites, tracées transversalement sur leurs faces latérales avant la torsion, seraient restées droites et perpendiculaires à l'axe s'il n'y avait eu aucun gauchissement des sections; elles n'auraient fait que s'incliner sur l'axe du prisme à base rectangle, en restant droites, s'il n'y avait eu que le premier gauchissement. Au lieu de cela, ces lignes, par la torsion, se sont courbées en doucine ou en S, de manière que les extrémités restaient normales aux arêtes, ce qui prouve bien le deuxième gauchissement dont on vient de parler.

» Ce point nouveau de la théorie de la résistance des solides paraît donc suffisamment confirmé par les faits. Il donne le moyen de faire une correction numérique aux formules, non-seulement de torsion, mais encore de résistance au glissement latéral des parties. »

CHIMIE. — *De l'influence des alcalis dans divers phénomènes naturels, et en particulier du rôle que joue l'ammoniaque dans la nutrition des animaux; par* M. Fréd. Kuhlmann.

(Commission précédemment nommée.)

« J'ai été conduit, en 1839, à l'occasion de recherches sur la nature

(1) *Résumé des Leçons de M. Navier, sur l'application de la mécanique;* deuxième édition, n° 161, page 105.