

acquièrent la liberté de se rapprocher au moment même où leur distance vient à s'accroître, et que ce rapprochement ne peut aller jusqu'au contact, parce que l'aimantation croissante qui en résulte leur oppose bientôt un obstacle insurmontable, lequel se lève de lui-même aussitôt que la distance interpolaire s'est accrue de nouveau.

» Le rapprochement des charbons est donc intermittent; mais, quand l'appareil est bien réglé, les périodes de repos et d'avancement se succèdent assez rapidement pour qu'elles équivalent à un mouvement de progression continu.

» Ce résultat étant obtenu depuis onze mois, je me plaisais à grouper autour de mon nouvel appareil les expériences d'optique les plus brillantes et les plus délicates.

» J'ai été interrompu dans ce travail par la nouvelle qu'un appareil analogue venait d'être construit en Angleterre. *L'Illustration anglaise* contient, dans son numéro du 18 novembre 1848, la description d'une lampe électrique pour laquelle l'inventeur, M. W. Edward Staite, a pris un brevet.

» Je n'ai donc pas l'intention de contester à M. Staite le mérite d'une idée qu'il a eue en même temps que moi. Mais puisque j'ai, de mon côté, pleinement réalisé un projet que je poursuivais depuis nombre d'années, oserais-je demander à l'Académie qu'une Commission veuille bien se transporter aussitôt chez moi, pour constater mes résultats, pour prononcer sur l'impossibilité matérielle qu'il y aurait eu pour moi d'improviser en si peu de temps des appareils nombreux et confectionnés pour la plupart entièrement de ma main? C'est le seul moyen qui me reste pour conserver ma juste part d'une invention dont je me réserve de faire ressortir ultérieurement l'utilité dans certaines recherches expérimentales.

» Si la Commission daigne se rendre à mon laboratoire, je lui soumettrai en même temps une nouvelle disposition de la pile de Bunsen, qui me permet de la mettre en activité et la replacer au repos en moins de cinq minutes. Ainsi, la Commission se convaincra, je l'espère, que je suivais une ligne bien déterminée, et que, dans ces conjonctures si fâcheuses pour moi, j'ai été victime du désir de ne soumettre à l'Académie qu'un travail complet. »

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Mémoire sur les vibrations tournantes des verges élastiques*; par M. DE SAINT-VENANT. (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires, MM. Cauchy, Poncelet, Piobert.)

« 1. Lorsqu'un prisme élastique est maintenu dans un état de torsion par deux couples agissant à ses extrémités, les rotations angulaires ψ de ses di-

verses sections transversales sont données par l'équation

$$(1) \quad G\mu_1 \frac{d\psi}{dx} = M_x,$$

qui exprime l'égalité du moment M_x de l'un des deux couples autour de l'axe du prisme (pris pour celui des x) avec le moment des réactions intérieures qui s'exercent à travers l'une quelconque de ces sections ω ;

» G représentant le coefficient d'élasticité dit de *glissement* transversal;

» μ_1 une quantité qui est moindre que le moment d'inertie de la section autour de son centre de gravité, en raison de ce que cette section, primitivement plane, devient légèrement courbe.

» Et si μ' et μ'' sont les moments d'inertie de la section autour de ses deux axes principaux, $\mu = \mu' + \mu''$ le moment autour de son centre, on a :

» Pour une section circulaire dont le rayon est h ,

$$(2) \quad \mu_1 = \mu = \frac{\pi h^4}{2};$$

alors, mais seulement alors, la section reste plane.

» Pour une section elliptique dont les deux demi-axes sont h et i ,

$$(3) \quad \mu_1 = \frac{2\mu' \cdot 2\mu''}{\mu' + \mu''} = \pi \frac{h^2 i^2}{h^2 + i^2} \quad (1);$$

alors la section prend la forme d'une surface réglée très-simple.

» Mais pour une section rectangulaire, la surface devient plus compliquée, parce que le principe de réciprocité des composantes tangentielles de pression, de M. Cauchy, prouve, comme l'expérience, que la section doit s'infléchir vers ses quatre angles, de manière que les quatre arêtes courbées du prisme y restent normales (2). Il en résulte que l'expression précédente en μ' et μ'' , qui revient à celle donnée en 1829 par l'illustre géomètre pour le prisme rectangle, n'y est exactement applicable que lorsqu'un des deux côtés de la base est très-petit par rapport à l'autre. Pour tout autre cas, μ_1 est exprimable en une série d'exponentielles dont le rapport avec l'expression ci-dessus est compris entre 0,841 et 1 (3), en sorte que nous poserons, pour une section rectangle dont h et i sont les demi-côtés,

$$\mu_1 = \alpha \frac{2\mu' \cdot 2\mu''}{\mu' + \mu''} = \alpha \cdot \frac{16}{3} \frac{h^2 i^2}{h^2 + i^2}.$$

(1) Mémoire présenté le 10 mai 1847. *Comptes rendus*, tome XXIV, page 849.

(2) Mémoire présenté le 22 février 1847. *Comptes rendus*, tome XXIV, page 260.

(3) Mémoire présenté le 22 mars 1847. *Comptes rendus*, tome XXIV, page 487.

On a, disons-nous, quand i est très-petit, $\alpha = 1$, $\mu_1 = 4\mu' = \frac{16}{3} hi^3$.

Section carrée, $h = i$, $\alpha = 0,841$, $\mu_1 = 0,841$, $\mu = 0,841 \cdot \frac{8h^4}{3}$, résultat confirmé, à 1 ou 2 centièmes près, par les expériences de réaction de torsion des barres carrées et des barres rondes, faites par Duleau et par Savart.

» **2.** L'équation (1) peut encore être posée pour une longue tige sollicitée par des forces agissant sur tous les points de sa masse et ne produisant qu'une faible torsion, M_x représentant alors la somme des moments de celles appliquées depuis ω jusqu'à une extrémité.

» On passe au cas du mouvement en remplaçant ces forces par les inerties

$$- \rho d\omega dx \frac{d^2(r\psi)}{dt^2},$$

ρ étant la densité, r le rayon vecteur d'un élément, et t le temps.

» Il en résulte, en différentiant les deux membres par rapport à x , celle

$$(5) \quad \frac{G \mu_1}{\rho \mu} \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

» **3.** Elle donne, pour le nombre de vibrations tournantes du son le plus grave, en une seconde, N' étant la longueur de la tige,

$$(6) \quad N' = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{G}{\rho} \cdot \frac{\mu_1}{\mu}},$$

ou

$$N' = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \text{ pour le cas de la base circulaire,}$$

$$N' = \frac{1}{2l} \sqrt{0,841 \frac{G}{\rho}} \text{ pour celui de la base carrée.}$$

Le nombre des vibrations longitudinales de la même tige est exprimé, comme on sait, par

$$N = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

» **4.** Ces formules sont propres à fournir des valeurs du rapport, en ce moment controversé, des coefficients d'élasticité *d'allongement* et de torsion E et G . On sait que, d'après les formules de Navier, Poisson et

MM. Cauchy, Lamé et Clapeyron, on aurait, dans les corps homogènes et isotropes, ou d'égalé élasticité en tous sens,

$$\frac{E}{G} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Mais M. Wertheim, en adaptant des résultats d'expériences d'équilibre à un commencement d'analyse de M. Cauchy, dont il rejette le complément, modifie profondément toutes ces formules, et prend

$$\frac{E}{G} = \frac{8}{3} = 2,6666\dots$$

» On aurait, d'après le numéro précédent,

$$\frac{E}{G} = \left(\frac{N}{N'}\right)^2 \text{ en tirant } N \text{ et } N' \text{ d'expériences sur les tiges rondes ;}$$

$$\frac{E}{G} = 0,841 \left(\frac{N}{N'}\right)^2 \text{ en les tirant d'expériences sur les tiges carrées.}$$

Or, pour les tiges rondes,

Chladni a donné. $\frac{N}{N'} = 1,50$ d'où $\frac{E}{G} = 2,25$

Savart a donné. " $1,6668$ " $2,778$

M. Wertheim a donné. " $1,6309$ " $2,660$

» Quant aux tiges carrées, M. Wertheim a bien voulu m'écrire qu'il a trouvé :

Fer. $\frac{N}{N'} = 1,6919$ d'où $\frac{E}{G} = 2,407$

Verre ordinaire " $1,6863$ " $2,392$

Cristal. " $1,6846$ " $2,387$

» La moyenne de ces six valeurs de $\frac{E}{G}$ est

2,48.

Si l'on rejette le résultat tiré de l'expérience ancienne de Chladni, on voit que ceux fournis par les tiges rondes sont plus favorables au rapport 2,67 de M. Wertheim, et ceux des tiges carrées, au rapport 2,50 de la théorie admise.

» Mais on ne peut guère compter sur l'*isotropie* des tiges métalliques ou vitreuses. L'inégalité de leur élasticité en divers sens suffit pour expliquer les différences trouvées, sans changer les formules démontrées par les géomètres pour le cas d'égalé élasticité, ainsi que j'espère le faire voir bientôt. »