MÉCANIQUE. — *Mémoire sur la flexion des prismes élastiques, sur les glissements qui l'accompagnent lorsqu'elle ne s'opère pas uniformément ou en en arc de cercle, et sur la forme courbe affectée alors par leurs sections transversales primitivement planes; par* **M. DE SAINT-VENANT.**

« La théorie de la résistance à la flexion généralement enseignée aujourd'hui est fondée sur la supposition que les *fibres* primitivement égales, dans lesquelles on conçoit divisées longitudinalement chacune des tranches minces dont se compose un prisme qu'on fléchit, s'allongent du côté convexe et s'accourcissent du côté concave proportionnellement aux différences entre les rayons de leurs courbures et celui de la courbure des fibres centrales qui sont restées de même longueur, et qu'elles résistent proportionnellement à leurs allongements et accourcissements très-petits, comme si elles étaient isolées ou n'exerçaient aucune pression normale les unes sur les autres.

» Dans un chapitre préliminaire d'un *Mémoire sur la torsion*, lu le 13 juin 1853 (*Sav. étr.*, t. XIV), nous avons montré que ces suppositions, et les formules qu'on en déduit, étaient exactes lorsque la flexion du prisme s'effectue d'une manière *égale*, c'est-à-dire en arc de cercle, sous l'action de forces se réduisant à des couples, mais à la condition que ces forces soient appliquées sur les bases extrêmes et distribuées à leurs divers points, comme elles le sont sur les sections de l'intérieur du prisme.

» Nous nous proposons : 1° d'examiner si ces mêmes suppositions et ces mêmes formules usuelles sont encore exactes, au moins pour certains modes d'application des forces, dans le cas le plus ordinaire, qui est celui d'une flexion *inégale*, bien qu'il soit démontré qu'alors les sections transversales ne restent ni planes ni normales à l'axe et aux fibres; 2° de déterminer la forme courbe prise par les surfaces de ces sections et les inclinaisons de leurs éléments sur les fibres, ou les glissements de celles-ci les unes sur les autres, afin de pouvoir (comme nous avons fait ailleurs) en combiner les effets avec ceux des dilatations longitudinales pour établir les conditions de résistance à la rupture.

» Plaçons l'origine des coordonnées au centre de gravité de l'une des bases extrêmes, en prenant pour axe des x son axe de figure et pour plan des xz un plan par rapport auquel on le suppose symétrique et symétriquement sollicité, et qui sera le plan de sa flexion, et appelons :

» u, v, w les déplacements dans les sens x, y, z de l'un quelconque de ses points, occupant le centre m de l'élément superficiel $d\omega$ de l'une de ses sections ω;

» I le moment d'inertie $\int z^2 d\omega$ de cette section;

» E le coefficient d'élasticité d'extension ou compression longitudinale;

» ε, ε' les fractions par lesquelles il faut multiplier la dilatation dans le sens x pour avoir les contractions qui l'accompagnent dans les sens y et z, quand il n'y a pas de pression normale latérale;

» G, G' les *coefficients d'élasticité de glissement* dans les sens y et z;

» η, η' les fractions $\frac{\varepsilon G}{E}$, $\frac{\varepsilon' G'}{E}$ (qui sont très-petites, soit $\frac{1}{10}$ environ);

» p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, $p_{yz} = p_{zy}$, $p_{zx} = p_{xz}$, $p_{zy} = p_{yz}$ les six composantes, dans les sens x, y, z des pressions ou tensions supportées au point m par trois petites faces planes perpendiculaires aux mêmes coordonnées;

» $M = P(a - x)$ le moment variable des forces extérieures autour d'une parallèle aux y, menée sur la section ω par son centre. Ces forces sont supposées n'avoir pas de composante totale dans le sens x, et P est leur composante totale dans le sens $-z$.

» Si les deux suppositions de la théorie ordinaire se réalisent, les dilatations $\frac{du}{dx}$ des fibres doivent varier linéairement avec z sur chaque section, et l'on doit avoir $p_{xx} = E\frac{du}{dx}$ comme si elles étaient de petits prismes isolés; d'où l'on déduit facilement que les fibres restées invariables sont celles pour lesquelles $z = 0$; et qu'on a le moment $M = \int p_{xx} z\, d\omega = \frac{p_{xx}}{z} I$; en sorte que

$$(1) \qquad p_{xx} = \frac{P(a-x)}{I} z, \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0,$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{P(a-x)}{EI} z, & \dfrac{dv}{dy} = -\varepsilon \dfrac{P(a-x)}{EI} z, \\[2mm] \dfrac{dw}{dy} = -\varepsilon' \dfrac{P(a-x)}{EI} z, & \dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dz} = 0. \end{cases}$$

» Il s'agit de savoir si toutes ces relations peuvent effectivement avoir lieu à la fois, et si l'on peut déterminer des déplacements qui y satisfassent, ainsi que : 1°. Aux équations différentielles indéfinies générales exprimant l'équilibre des divers éléments solides, et qui se réduisent à

$$(3) \qquad \frac{dp_{zy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = \frac{Pz}{I}, \quad \frac{dp_{zy}}{dx} = 0, \quad \frac{dp_{xz}}{dx} = 0,$$

où il faut faire (la contexture du corps étant supposée avoir trois plans de symétrie)

$$(4) \qquad p_{xy} = G\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right), \quad p_{xz} = G'\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right).$$

» 2°. A l'équation définie exprimant la nullité des pressions extérieures latérales,

$$(5) \qquad - p_{xy}\, dz + p_{xz}\, dy = 0.$$

» Une première intégration des expressions (2), eu égard à (3), (4), (5), donne facilement

$$(6) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{P(2ax - x^2)z}{2EI} + F(y, z), \quad v = -\eta\, \dfrac{P(a-x)yz}{GI}, \\ w = g_0 x - \dfrac{P}{2EI}\left(ax^2 - \dfrac{x^3}{2}\right) + \dfrac{P(a-x)}{2I}\left(\dfrac{\eta y^2}{G} - \dfrac{\eta' z^2}{G'}\right), \end{cases}$$

g_0 étant une constante, et F une fonction de y et z qui doit être telle que

$$(7) \quad G\frac{d^2F}{dy^2} + G'\frac{d^2F}{dz^2} = \frac{Pz}{I}(1 - \eta - \eta'), \text{ et } F(-y, z) = F(y, z), \text{ partout;}$$

$$(8) \quad F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dz} = 0 \text{ à l'origine, ou pour } y = 0,\ z = 0;$$

$$(9) \quad - G\left(\frac{dF}{dy} + \frac{\eta P yz}{GI}\right)dz + G'\left[\frac{dF}{dz} + g_0 + \frac{P}{2I}\left(\frac{\eta' z^2}{G'} - \frac{\eta y^2}{G}\right)\right]dy = 0$$

aux points du contour des sections.

Si l'on se donne arbitrairement pour F une des fonctions de y, z satisfaisant à (7) et (8), l'équation (9), la troisième de celles qu'elle doit vérifier, ne sera autre chose que l'*équation différentielle du contour de la section du prisme* pour lequel F a la forme choisie. Or, en prenant pour F une fonction entière ne dépassant pas le troisième degré, et qui devra être, m représentant une constante,

$$(10) \qquad F(y, z) = \frac{P}{2GI}(1 - \eta - m)y^2 z + \frac{P}{6G'I}(m - \eta')z^3,$$

l'équation différentielle (9) peut être rendue homogène, et son intégration donne, C étant une constante,

$$(11) \quad Cy^{\frac{m}{1-m}} + G'(1 - 2\eta - m)y^2 + G(3m - 2)z^2 = - \frac{G(3m-2)}{m} \cdot \frac{2G'I}{P} g_0.$$

Elle représente *des ellipses* si l'on fait la constante $C = 0$. Et, si l'on donne à cette constante, ainsi qu'à celle m, diverses valeurs, mais de manière que l'exposant $\frac{m}{1-m}$ ait des valeurs positives et paires, telles que 4, 6, 8, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{5}$, on obtiendra un nombre indéfini de courbes fermées et symétriques.

La constante g_0 aura pour valeur $-\frac{mP}{2GI}c^2$, $2c$ étant l'*axe* de ces courbes parallèle aux z.

» D'où l'on voit déjà que, pour des sections d'une infinité de formes, les formules de la théorie ordinaire sont exactes, mais à la condition que les forces faisant fléchir soient appliquées et distribuées sur les bases extrêmes conformément aux valeurs (4) que prendront p_{xy} et p_{xz}, en y mettant les leurs pour u, v, w, F et g_0. Et les sections, au lieu de rester planes et normales aux fibres comme on le suppose ordinairement, prendront une inclinaison g_0 sur l'axe du prisme et deviendront des surfaces courbes représentées par l'équation

$$u = F(y, z).$$

» Lorsque la section est un rectangle dont les côtés sont $2b$, $2c$ parallèlement aux y et aux z, la condition définie (9) se partage en deux autres

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dF}{dz} = -g_0 - \dfrac{P\eta' c^2}{2G'I} + \dfrac{P\eta}{2GI}y^2, \text{ pour } z = \pm c, \text{ et } y \text{ entre } -b \text{ et } b, \\[2ex] \text{et } \dfrac{dF}{dy} = -\eta\dfrac{Pyz}{GI}, \text{ pour } y = \pm b, \text{ et } z \text{ entre } -c \text{ et } c. \end{array}\right.$$

On réduit à zéro les seconds membres de la dernière de ces équations et de celle indéfinie (7), en prenant à la place de F une autre fonction inconnue $F_1(y, z)$, telle que

$$(13)\qquad F(y, z) = F_1(y, z) - \frac{\eta P}{2GI}y^2 z + \frac{P(1-\eta')}{6GI}z^3;$$

et l'on satisfait à toutes les conditions moins la seconde (8) $\frac{dF}{dz} = 0$ pour $y = 0$, $z = 0$, en prenant pour cette nouvelle fonction

$$(14)\qquad F_1(y, z) = Kz + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n\left(e^{\frac{n\pi\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}z} - e^{-\frac{n\pi\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}z}\right)\cos\frac{n\pi y}{b},$$

le coefficient K du terme Kz, qui remplace celui de la série Σ répondant à $n = 0$, et le coefficient général A_n ayant les valeurs suivantes :

$$(15)\quad K = -g_0 - \frac{Pc^2}{2G'I} + \frac{\eta P b^2}{3GI},\quad A_n = \frac{\eta P}{GI}\cdot\frac{4b^3}{\pi^3}\sqrt{\frac{G'}{G}}\cdot\frac{(-1)^n}{n^3}\,\frac{1}{e^{\frac{n\pi\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}c} + e^{-\frac{n\pi\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}c}}.$$

On remplira la dernière condition $\frac{dF}{dz} = 0$ pour $y = 0$, $z = 0$, en disposant de la constante g_0, ce qui donnera la valeur suivante de cette petite inclinaison prise par les sections sur l'axe fléchi du prisme

$$(16) \qquad g_0 = -\frac{Pc^2}{2G'I} + \eta\frac{Pb^2}{3GI} + \frac{\eta P}{GI}\cdot\frac{4b^2}{\pi^2}\sum\frac{(-1)^n}{n^2}\frac{2}{e^{\frac{n\pi\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}} + e^{-\frac{n\pi\sqrt{G}}{b\sqrt{G'}}}}.$$

» En substituant, on obtiendra : 1° les déplacements u, v, w; 2° l'équation $u = F(y, z)$ de la surface courbe affectée par les sections; 3° les valeurs (4) de p_{xy}, p_{xz}, qui apprendront de quelle manière les forces qui font fléchir doivent être appliquées et distribuées sur les bases extrêmes du prisme rectangle pour que sa flexion suive les lois supposées, et se trouve exactement mesurée par les formules de la théorie ordinaire, qui, comme on voit, représentent généralement une sorte d'état *permanent* d'un bout à l'autre du prisme, servant de limites aux autres états, qui résultent de modes d'application différents et qui s'en rapprochent d'autant plus que l'on considère des sections moins proches des extrémités. »

MINÉRALOGIE. — *Sur le klinochlor d'Achmatowsk;* par M. le lieutenant-colonel **N. de Kokscharow.**

« Le minéral vert d'Achmatowsk, remarquable surtout par son dichroïsme et par son clivage parfait, a été assez longtemps, comme on sait, confondu avec la chlorite de Werner. V. Kobell a réussi le premier, au moyen de l'analyse chimique, à démontrer que le minéral d'Achmatowsk, ainsi qu'un autre minéral de Schwarzenstein (identique avec celui d'Achmatowsk), se distingue d'une manière très-remarquable de la chlorite de Werner, et le considéra comme une espèce toute particulière à laquelle il donna le nom de ripidolithe (ῥιπίς, éventail, et λίθος, pierre). G. Rose trouva, de son côté, que les propriétés indiquées pour la ripidolithe, s'appliquent plutôt au minéral de Werner qu'à celui d'Achmatowsk : il employa dans un sens tout contraire le nom proposé par V. Kobell, et désigna sous le nom de chlorite le minéral d'Achmatowsk et de Schwarzenstein que V. Kobell nomme ripidolithe, et sous celui de ripidolithe le minéral du Saint-Gothard et de Rauny, auquel V. Kobell avait laissé son ancien nom de chlorite. Récemment on a découvert près de West-Chester, en Pensylvanie, un minéral qui, par sa composition chimique et ses diverses propriétés, peut à peine être distingué du minéral d'Achmatowsk. W.-P. Blake l'a nommé *klinochlor* (clinochlore).

» Les cristaux d'Achmatowsk ont été rapportés par V. Kobell au système hexagonal (trois et un axes de Weiss). Tous les autres minéralogistes qui