ZEITSCHRIFT
des
Architekten- und Ingenieur-Vereins
zu
HANNOVER.

Herausgegeben von dem Vorstande des Vereins.

Band XXXV. Jahrgang 1889. Heft 8.

Bauwissenschaftliche Mittheilungen.

Ueber statisch unbestimmte Träger bei beliebigem Formänderungs-Gesetze und über den Satz von der kleinsten Ergänzungsarbeit;

von Baurath Prof. Fr. Engesser zu Karlsruhe.

Die gebräuchlichen Formeln der Festigkeitslehre beruhen bekanntlich auf der Voraussetzung eines einfachen Verhältnisses zwischen Spannung σ und Dehnung ε, d. h. auf der Gleichung $\sigma = E\varepsilon$. Sie besitzen daher keine Gültigkeit mehr, sobald die Spannungen die Elasticitätsgrenze (Proportionalitätsgrenze) überschritten haben, bezw. wenn eine Elasticitätsgrenze, wie beispielsweise bei Gusseisen, überhaupt nicht vorhanden ist. Zur Beurtheilung derartiger Fälle bedarf es besonderer Untersuchungen, und es wurden solche von M. v. Thullie bezüglich der Biegungsfestigkeit gerader Balken (s. 1888, S. 312; Wochenblatt für Baukunde 1887, S. 365), von dem Verfasser bezüglich der Nebenspannungen von Fachwerkträgern (s. 1889, S. 373; Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure 1888, S. 813) und bezüglich der Knickfestigkeit gerader Stäbe (s. 1889, S. 455) angestellt.

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf das Verhalten statisch unbestimmter Träger bei beliebigem Formänderungs-Gesetze; insbesondere werden statisch unbestimmte Fachwerkträger einer eingehenderen Behandlung unterzogen.

Zur Lösung der gestellten Aufgabe bietet der Satz der virtuellen Verschiebungen den bequemsten und sichersten Weg, während der Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit sich als unzulänglich erweist, da seine Gültigkeit an bestimmte Formänderungs-Gesetze gebunden ist. An seine Stelle tritt der allgemeinere Satz von der kleinsten „Ergänzungsarbeit".

I.

Unter der Voraussetzung so geringer Formänderungen, dass die Kräftepläne des ursprünglichen und des gebogenen Trägers nicht wesentlich von einander abweichen, gilt allgemein die Gleichung der virtuellen Verschiebungen

$$\sum Pv = \sum Se + \sum Cc, \qquad (1$$

worin die Lasten mit P, die Auflagerdrücke, d. h. die Drücke des Trägers gegen die Auflager, mit C, die Stabkräfte mit S und die zugehörigen virtuellen Verschiebungen mit v, c, e bezeichnet sind.

Ist nun bei einem statisch unbestimmten Träger m die Zahl der überzähligen, statisch unbestimmbaren Gröfsen, welche mit X', $X'' \ldots X^m$ bezeichnet werden mögen, so können die nothwendigen Stabkräfte und Auflagerdrücke durch Ausdrücke von der Form

$$\left.\begin{aligned} S &= \mathfrak{S} + \mathfrak{s}' X' + \mathfrak{s}'' X'' + \ldots \mathfrak{s}^m X^m \\ C &= \mathfrak{C} + \mathfrak{c}' X' + \mathfrak{c}'' X'' + \ldots \mathfrak{c}^m X^m \end{aligned}\right\} \qquad (2$$

dargestellt werden, wo $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}'' \ldots$ diejenigen Kräfte bedeuten, welche im betrachteten Stabe nach Entfernung der überzähligen Gröfsen entstehen, wenn man auf das nunmehr statisch bestimmte System nach einander nur die Lasten P und die Gröfsen $X' = 1$, $X'' = 1, \ldots X^m = 1$ einwirken lässt. $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}'' \ldots$ bezeichnen die entsprechenden Werthe für die Auflagerdrücke. Für einen überzähligen Stab X^r, bezw. Auflagerdruck X^r, gelten ebenfalls die Gleichungen 2, weil hierfür $\mathfrak{S}$ bezw. $\mathfrak{C} = 0$, $\mathfrak{s}^r$ bezw. $\mathfrak{c}^r = 1$, sämmtliche übrige $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{c}$ jedoch $= 0$ sind.

Aus Gl. 2 folgt durch Differenzirung

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{\partial S}{\partial X'}=\mathfrak{s}', & \frac{\partial S}{\partial X''}=\mathfrak{s}'', & \text{allgemein } \frac{\partial S}{\partial X}=\mathfrak{s} \\ \frac{\partial C}{\partial X'}=\mathfrak{c}', & \frac{\partial C}{\partial X''}=\mathfrak{c}'', & \quad " \quad \frac{\partial C}{\partial X}=\mathfrak{c} \end{array}\right\} \quad (3$$

Führt man in die allgemeine Gleichung 1 als virtuelle Verschiebungen die wirklichen Formänderungen des gegebenen Falles, als Kräfte nach einander die der Belastung durch $X'=1$, $X''=1 \ldots X^m=1$ entsprechenden Werthe ein, wobei jeweils alle übrigen Gröfsen X, sowie die Belastungen P gleich Null angenommen werden, so erhält man die bekannten m Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} 0=\sum\mathfrak{s}'e+\sum\mathfrak{c}'c \text{ oder } =\sum\frac{\partial S}{\partial X'}e+\sum\frac{\partial C}{\partial X'}c \\ 0=\sum\mathfrak{s}''e+\sum\mathfrak{c}''c \text{ oder } =\sum\frac{\partial S}{\partial X''}e+\sum\frac{\partial C}{\partial X''}c. \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \end{array}\right\} \quad (4$$

Wenn, wie gewöhnlich, die Auflagerdrücke C keine Arbeit verrichten, indem die Lager entweder fest oder ohne Reibung rechtwinklig zur Druckrichtung verschieblich sind, d. h. $c=0$, so geben die Gleichungen 4 über in

$$\left.\begin{array}{l} 0=\sum\mathfrak{s}'e=\sum\frac{\partial S}{\partial X'}e \\ 0=\sum\mathfrak{s}''e=\sum\frac{\partial S}{\partial X''}e \\ \quad\vdots \qquad \vdots \end{array}\right\} \quad (5$$

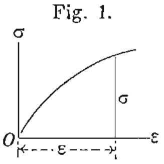


Fig. 1.

Zur Bestimmung der Stabverlängerung e sei die Beziehung zwischen σ und ε allgemein durch die Gleichung $\varepsilon=f(\sigma)$ gegeben (Arbeitskurve, Fig. 1). Wenn ein Stab von der Länge s und dem Querschnitte F die Kraft S auszuhalten hat, so dehnt er sich um

$$s\varepsilon=s\cdot f(\sigma)=s\cdot f\left(\frac{S}{F}\right).$$

Erhöht sich gleichzeitig die Temperatur des Stabes gegenüber dem normalen Anfangszustande um t Grad, so ist

$$e=(\varepsilon+\alpha t)s=\left\{f\left(\frac{S}{F}\right)+\alpha t\right\}s \ ^{*}).$$

Nach Einsetzen dieses Werthes von e gehen die Gleichungen 5 über in

$$\left.\begin{array}{l} 0=\sum\mathfrak{s}'\left\{f\left(\frac{S}{F}\right)+\alpha t\right\}s= \\ \qquad\sum\mathfrak{s}'\left\{f\left(\frac{\mathfrak{S}+\mathfrak{s}'X'+\mathfrak{s}''X''+\ldots}{F}\right)+\alpha t\right\}s \\ 0=\sum\mathfrak{s}''\left\{f\left(\frac{S}{F}\right)+\alpha t\right\}s= \\ \qquad\sum\mathfrak{s}''\left\{f\left(\frac{\mathfrak{S}+\mathfrak{s}'X'+\mathfrak{s}''X''+\ldots}{F}\right)+\alpha t\right\}s \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}\right\} \quad (6$$

Aus den m Gleichungen 6 können schliefslich die m Gröfsen X bestimmt werden, sobald die Funktion f bekannt ist.

*) Der Einfluss einer fehlerhaften Anfangslänge des Stabes ($=s+\lambda$) ist gleich dem einer Temperaturerhöhung $t=\frac{\lambda}{\alpha s}$, welche dieselbe Stablänge $s+\lambda$ hervorruft.

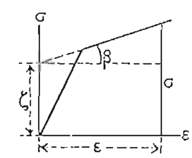
In ähnlicher Weise sind die Gleichungen 4 umzuformen, für den Fall, dass die Auflagerdrücke C Arbeit leisten.

Die Beziehung zwischen σ und ε möge beispielsweise durch 2 Gerade dargestellt werden mit den Gleichungen

$\varepsilon=\frac{\sigma}{E}$ (innerhalb der Elasticitätsgrenze) und

$\varepsilon=\frac{\sigma-\zeta}{D}$ (aufserh. der Elasticitätsgrenze),

Fig. 2.



wie dies annähernd bei Schmiedeisen der Fall ist. (S. Fig. 2, wo $\operatorname{tg}\beta=D$.)

Wenn es sich durchgehends um Spannungen aufserhalb der Elasticitätsgrenze handelt, ist $\left(\frac{S}{F}-\zeta\right)\frac{1}{D}$ als $f\left(\frac{S}{F}\right)$ in Gleich. 6 einzuführen, wodurch man erhält

$$\left.\begin{array}{l} 0=\sum\mathfrak{s}'\left(\frac{\mathfrak{S}+\mathfrak{s}'X'+\mathfrak{s}''X''+\ldots}{DF}-\frac{\zeta}{D}+\alpha t\right)s \\ 0=\sum\mathfrak{s}''\left(\frac{\mathfrak{S}+\mathfrak{s}'X'+\mathfrak{s}''X''+\ldots}{DF}-\frac{\zeta}{D}+\alpha t\right)s \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}\right\} \quad (7$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den innerhalb der Elasticitätsgrenze gültigen nur dadurch, dass das Glied mit ζ hinzukommt und dass D an die Stelle von E tritt. Schreibt man, konstantes E und D vorausgesetzt, die Gleich. 7 in der Form

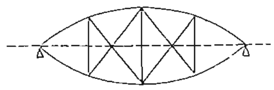
$$\left.\begin{array}{l} 0=\frac{E}{D}\sum\mathfrak{s}'\left(\frac{\mathfrak{S}+\mathfrak{s}'X'+\mathfrak{s}''X''+\ldots}{EF}-\frac{\zeta}{E}+\frac{D}{E}\alpha t\right)s \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}\right\} \quad (7^{a}$$

so ist ersichtlich, dass man dieselben Gleichungen erhält, wie bei einem unter dem Elasticitätsgesetze $\sigma=E\varepsilon$ stehenden Träger, dessen Stäbe auf die Längeneinheit um $\frac{\zeta}{E}$ zu kurz ausgeführt sind, und für welchen die Wärmedehnungsziffer $\frac{D}{E}\alpha$ statt α beträgt. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass ζ positiv oder negativ ist, je nachdem der betr. Stab Zug- oder Druckspannung erleidet.

Bei normaler Temperatur, d. h. für $t=0$, unterscheiden sich die Gl. 7^{a} von den entsprechenden des vollkommen elastischen Trägers nur durch das Glied $\sum\frac{\mathfrak{s}\zeta s}{E}$. Wird letzteres gleich Null, so erhält man dieselben Gleichungen, bezw. dieselben Gröfsen X, wie innerhalb Elasticitätsgrenze. Die Bedingung $\sum\frac{\mathfrak{s}\zeta s}{E}=0$ geht bei konstantem Absolutwerthe ζ über in $\sum\pm\mathfrak{s}s=0$ und drückt dann gleichzeitig auch aus, dass das Fachwerk derartig dimensionirt werden kann, dass sämmtliche Stäbe bei einer gegebenen Belastung die gleiche

Dehnung,*) bezw. die gleiche Spannung erleiden. Hierher gehört u. A. der zweitheilige, vollkommen symmetrische Fachwerkträger (Fig. 3), dessen senkrechte Lasten in der wagerechten Symmetrieachse angreifen.

Fig. 3.



Bei Bogenträgern haben in der Regel sämmtliche Stäbe Spannungen gleichen Sinnes. Die Summe $\sum \frac{\mathfrak{s} s \zeta}{E}$ ist dann gleich $\frac{\zeta}{E} \sum \mathfrak{s} s = \frac{\zeta l}{E}$, wenn ζ konstant und 2 Kämpfergelenke vorausgesetzt werden. Nach Ueberschreiten der Elasticitätsgrenze ergeben sich daher die gleichen Formeln wie bei der gewöhnlichen Theorie, wenn die Widerlager um $\frac{-l\zeta}{E}$ ausweichen.

Für $\zeta = -2400^{\mathrm{at}}$ und $E = 2000000^{\mathrm{at}}$ folgt $\frac{-l\zeta}{E} = 0{,}0012\, l$.

Es ist hieraus ersichtlich, dass derartige Bogenträger nach Ueberschreiten der Elasticitätsgrenze wesentlich ungünstiger beansprucht werden als vorher, und dass daher deren Bruchsicherheit, abgesehen von dem weiter unten erwähnten Umstande, weit geringer ist, als auf Grund der üblichen Formeln angenommen werden dürfte.

Liegen die Stabspannungen theils innerhalb, theils aufserhalb der Elasticitätsgrenze, so sind die Gl. 7 durch folgende Gleichungen zu ersetzen:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \sum\limits^{1} \mathfrak{s}' \left(\frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{s}' X' + \mathfrak{s}'' X'' + \ldots}{E F} \right) s + \\ \quad \sum\limits^{2} \mathfrak{s}' \left(\frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{s}' X' + \mathfrak{s}'' X'' + \ldots}{D F} - \frac{\zeta}{D} \right) s + \sum \mathfrak{s}' a t s \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \end{array} \right\} \quad (8$$

wo sich $\sum\limits^{1}$ auf die Stäbe innerhalb der Elasticitätsgrenze,

$\sum\limits^{2}$ „ „ „ aufserhalb „ „

bezieht. Der Umfang der Summen muss im Allgemeinen durch Probiren ermittelt werden. Ist, wie bei Schmiedeisen, D wesentlich kleiner als E, so kann in der Regel $\sum\limits^{1}$ gegen $\sum\limits^{2}$ vernachlässigt werden.

Will man die vorentwickelten Gleichungen auch auf die beim Bruche eintretenden Verhältnisse anwenden, so ist zu berücksichtigen, dass, in Folge der meist grofsen Formänderungen in der Nähe des Bruches, der Kräfteplan des deformirten Netzes wesentlich von dem des ursprünglichen Netzes abweichen kann und dass dann die Grundbedingung unserer Gleichungen nicht mehr erfüllt ist.

*) Setzt man in Gl. 5 $e = \varepsilon s$, so erhält man, für den gleichen Absolutworth der Dehnung ($\varepsilon = \pm \varepsilon_0$) bei sämmtlichen Stäben, die Gleichung $0 = \sum \mathfrak{s} \varepsilon s = \varepsilon_0 \sum \pm \mathfrak{s} s = \sum \pm \mathfrak{s} s \ldots$ Dieselbe gilt für jedes beliebige Formänderungs-Gesetz. Der gleichen Dehnung sämmtlicher Stäbe entspricht eine gleiche Spannung derselben, sobald das Formänderungs-Gesetz für alle Stäbe, namentlich für Zugstäbe und Druckstäbe, dasselbe ist, also im vorliegenden Falle, sobald D und ζ konstant sind.

Eine allgemeine unmittelbare Behandlung dieser Aufgabe ist mit sehr grofsen Schwierigkeiten verknüpft. Man kann jedoch auf Umwegen näherungsweise das Ziel erreichen, indem man zuerst unter den bisherigen Annahmen die Stabkräfte und sodann das entsprechende deformirte Knotenpunktsnetz bestimmt. Legt man hierauf einer zweiten Rechnung das neue Knotenpunktsnetz zu Grunde, so werden die Ergebnisse meist wenig mehr von der Wirklichkeit abweichen; nöthigenfalls kann das angegebene Verfahren wiederholt werden.

Ein derartiges Näherungs-Verfahren ist namentlich bei Bogenträgern angezeigt, wenn man deren wirkliche Bruchlast berechnen will, während bei geraden Balkenträgern die unmittelbare Verwendung der aufgestellten Gleichungen in der Regel zulässig sein wird.

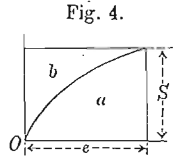
II.

Der Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit, welchen Castigliano und Fränkel unter Voraussetzung des Elasticitätsgesetzes $\varepsilon = {}^{\sigma}/_{E}$ abgeleitet haben, hat bei beliebigem Formänderungs-Gesetze $\varepsilon = f(\sigma)$ keine allgemeine Gültigkeit, da die Bedingungsgleichungen 5 nur in bestimmten Einzelfällen gleichzeitig als Bedingungen für das Minimum der Formänderungsarbeit angesehen werden können.

Wächst die Stabkraft allmählich von 0 bis S, so ist deren Arbeit $a = \int_0^e S \cdot de$, somit die Arbeit aller Stäbe

$$A = \sum a = \sum \int S\, de \quad \text{(s. Fig. 4).}$$

Fig. 4.



Würde die Stabkraft S den Weg e mit gleichbleibender Stärke zurücklegen, so wäre deren Arbeit, die sogenannte virtuelle Arbeit, $a_v = S e$ und somit die gesammte virtuelle Arbeit $A_v = \sum a_v = \sum S e$. Der Unterschied zwischen virtueller Arbeit A_v und wirklicher Arbeit A werde Ergänzungsarbeit genannt und mit B bezeichnet. Man hat sodann

$$B = A_v - A = \sum a_v - \sum a = \sum b = \sum \int_0^S e\, dS.$$

Die Bedingungen, dass die Formänderungsarbeit A als Funktion der überzähligen Grössen X' X'' ... ein Minimum darstelle, lauten

$$\frac{\partial A}{\partial X'} = 0, \quad \frac{\partial A}{\partial X''} = 0 \ldots, \quad \text{allgemein } \frac{\partial A}{\partial X} = 0,$$

bezw., wenn man $A = \sum \int S de$, $e = \varepsilon s = f\left(\frac{S}{F}\right) s$, $de = f'\left(\frac{S}{F}\right) \frac{s}{F} dS$ einführt,

$$0 = \frac{\partial A}{\partial X} = \sum \frac{\partial}{\partial X} \int S f'\left(\frac{S}{F}\right) \frac{s}{F} dS = \sum S f'\left(\frac{S}{F}\right) \frac{s}{F} \frac{\partial S}{\partial X} \cdot \quad (9$$

Gl. 9 stimmt mit Gl. 5 allgemein nur dann überein, wenn die Temperatur normal bleibt, d. h. $t = 0$, und wenn $f\left(\frac{S}{F}\right) = \frac{1}{C}\left(\frac{S}{F}\right)^n$, wo n und C beliebige Zahlen bezeichnen.

Gl. 5 lautet dann

$$0=\sum \mathfrak{s}e=\sum \frac{\partial S}{\partial X}\cdot\frac{1}{C}\left(\frac{S}{F}\right)^n\cdot s=\sum \frac{\partial S}{\partial X}\left(\frac{S}{F}\right)^n s,$$

Gl. 9 lautet dann

$$0=\sum Sn\left(\frac{S}{F}\right)^{n-1}\frac{s}{C\cdot F}\frac{\partial S}{\partial X}=\sum\frac{\partial S}{\partial X}\left(\frac{S}{F}\right)^n s.$$

Beide Gleichungen sind somit identisch.

Der Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit gilt hiernach allgemein nur für Formänderungen nach Parabeln beliebigen Grades, $\varepsilon=\frac{\sigma^n}{C}$. Die Elasticitätsgleichung $\varepsilon={}^{\sigma}/_{E}$ stellt den Sonderfall für $n=1$ und $C=E$ dar.

Außerdem kann die Gültigkeit auch noch in besonderen Fällen, bei besonderen Trägerarten und Belastungsarten eintreten; es findet dies beispielsweise für den unter I behandelten Fall $\varepsilon=\frac{\sigma-\zeta}{D}$ und $\sum\frac{\mathfrak{s}\zeta s}{D}=0$ statt.

An Stelle des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit tritt bei beliebigem Formänderungs-Gesetze der Satz von der **kleinsten Ergänzungsarbeit.**

Setzt man die Differentialquotienten von B nach den Größen X einzeln gleich Null, so erhält man Gleichungen von der Form

$$0=\frac{\partial B}{\partial X}=\sum\frac{\partial}{\partial X}\int dS\cdot e=\sum\frac{\partial S}{\partial X}\cdot e\,. \qquad (10$$

Gl. 10 stimmt mit Gl. 5 vollkommen überein, und zwar für jeden beliebigen Werth von e, also auch für beliebige Temperaturänderung.

Gl. 10 ist die Bedingung für den Kleinstwerth von B als Funktion der Größen X. Die wirklich auftretenden Werthe von X entsprechen also der kleinsten Ergänzungsarbeit B.

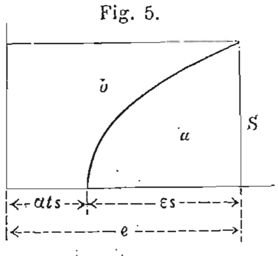


Fig. 5.

Die Ergänzungsarbeit b eines einzigen Stabes kann bei beliebiger Temperaturänderung wie in Fig. 5 dargestellt werden.

Geht die Arbeitskurve in eine Gerade über, d. h. handelt es sich um Formänderungen nach dem Elasticitätsgesetze $\sigma=E\varepsilon$ bei beliebiger Temperaturänderung, so wird

$$B=\sum b=\sum S\left(\frac{\varepsilon s}{2}+\alpha t s\right)=\sum S\left(\frac{Ss}{2EF}+\alpha t s\right),$$

gleich dem von Müller-Breslau **ideelle Formänderungsarbeit** A_i genannten Ausdrucke (s. 1884, S. 211). Der Satz vom Kleinstwerthe der ideellen Formänderungsarbeit bildet somit einen besonderen Fall des Satzes vom Kleinstwerthe der Ergänzungsarbeit.

Bildet die Arbeitskurve eine Parabel $\varepsilon=\frac{1}{C}\sigma^n$, so wird für $t=0$

$$B=\sum b=\sum\frac{1}{n+1}S\cdot\varepsilon s,$$

$$A=\sum a=\sum\frac{n}{n+1}S\cdot\varepsilon s=nB\,.$$

Da sonach A und B gleichzeitig ihren Kleinstwerth erreichen, so kann hier die Bedingung *min* A an Stelle von *min* B treten, im Einklange mit den früheren Ausführungen.

Bis jetzt war stets auf die Gleichungen 5 Bezug genommen worden, welche $c=0$, d. h. Weg der Auflagerdrücke gleich Null, zur Voraussetzung haben. Der Satz von der kleinsten Ergänzungsarbeit gilt aber auch, wenn die Auflagerdrücke Arbeit leisten, sofern man nur in B die der Auflagerbewegung entsprechende Ergänzungsarbeit der Auflagerdrücke C einbegreift, also $B=\sum\int dS\cdot e+\sum\int dC\cdot c$ setzt, wie aus dem Vergleiche von $\frac{\partial B}{\partial X}=0$ mit Gl. 4 hervorgeht.

Wenn bei der Auflagerbewegung keine gegenseitigen Verschiebungen von Träger und Stützkörper (Pfeiler, Widerlager) unter Entwickelung von Reibungskräften auftreten, dann ist $\sum\int dC\cdot c$ gleich der Ergänzungsarbeit der Stützkörper (Fundamente eingeschlossen); unter B ist also die Ergänzungsarbeit der gesammten Konstruktion, Träger + Stützkörper, zu verstehen. Für diesen Fall lässt sich somit bei beliebigem Formänderungs-Gesetze und bei beliebiger Temperaturänderung der Satz aussprechen:

Die überzähligen Größen X eines statisch unbestimmten Fachwerkes nehmen diejenigen Werthe an, welche die Ergänzungsarbeit der gesammten Konstruktion zu einem Kleinstwerthe machen.

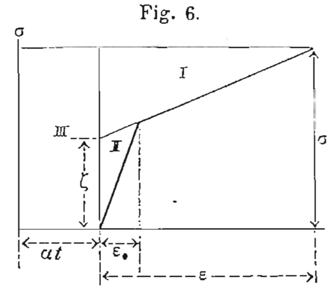


Fig. 6.

Bei Anwendung vorstehenden Satzes auf das unter I behandelte Beispiel erhält man als Ergänzungsarbeit des Fachwerks laut Fig. 6:

$$B=\sum b=\sum Fs\,(\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III})=$$

$$\sum Fs\left\{\frac{(\sigma-\zeta)\,\varepsilon}{2}+\frac{\zeta\varepsilon_0}{2}+\sigma\alpha t\right\},$$

wo $\varepsilon_0=$ Dehnung an der Elasticitätsgrenze $=\frac{g}{E}$, $\varepsilon=\frac{(\sigma-\zeta)}{D}$, somit

$$B=\sum Fs\left\{\frac{(\sigma-\zeta)^2}{2D}+\frac{\zeta g}{2E}+\sigma\alpha t\right\}=$$

$$\sum\frac{(S-F\zeta)^2 s}{2FD}+\frac{F\zeta gs}{2E}+S\alpha ts\,,$$

$$0=\frac{\partial B}{\partial X}=\sum\left\{\frac{(S-F\zeta)\,s}{FD}+\alpha ts\right\}\frac{\partial S}{\partial X}=$$

$$\sum\mathfrak{s}\left\{\frac{S}{FD}-\frac{\zeta}{D}+\alpha t\right\}s,\quad\text{da}\ \frac{\partial S}{\partial X}=\mathfrak{s}\,.$$

Diese Gleichung stimmt vollkommen mit Gl. 7 überein, wenn man S durch seinen Werth $\mathfrak{S}+\mathfrak{s}'X'+\mathfrak{s}''X''\ldots$ ersetzt.

Denkt man sich bei einem beliebig belasteten Fachwerke die Lasten P um dP wachsend, wobei sich ihre Angriffspunkte um dv verschieben mögen, so ist die Aenderung der äufseren Arbeit, wenn die Auflagerdrücke keine Arbeit leisten, gleich $\sum P dv$, die Aenderung der inneren Arbeit gleich dA, somit $\sum P dv = dA$.

Ferner ist auch die Aenderung der inneren und äufseren virtuellen Arbeit gleich grofs, also $d\sum Pv = dA_v$ oder $\sum P dv + \sum v dP = dA + dB$, und mit Rücksicht darauf, das $\sum P dv = dA$,

$$\sum v dP = dB.$$

Aus letzterem Ausdrucke folgt $v = \frac{\partial B}{\partial P}$, d. h. die Verschiebung v des Angriffspunktes einer Last P in der Richtung derselben ist gleich dem Differentialquotienten der Ergänzungsarbeit B nach P. Leisten die Auflagerdrücke Arbeit, so ist auch hier in B die Ergänzungsarbeit der Auflagerdrücke einzurechnen.

Für das Elasticitätsgesetz $\sigma = E\varepsilon$ und normalen Temperaturzustand wird $A = B$, somit auch

$$v = \frac{\partial B}{\partial P} = \frac{\partial A}{\partial P}.$$

Aendert sich gleichzeitig die Temperatur, so ist B gleich der ideellen Formänderungsarbeit A_i, also $v = \frac{\partial B}{\partial P} = \frac{\partial A_i}{\partial P}$. Bei jedem anderen Formänderungs-Gesetze gilt die Gleichung $v = \frac{\partial A}{\partial P}$ bezw. $= \frac{\partial A_i}{\partial P}$ nicht mehr allgemein.

Auch der Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen ist an das Elasticitätsgesetz $\sigma = E\varepsilon$ gebunden. Führt man in Gl. 1 diejenigen Stabkräfte $\mathfrak{s}_a$ ein, welche einer im Punkte a wirkenden Last $P_a = 1$ entsprechen, und diejenigen Verschiebungen, welche einer im Punkte b wirkenden Last $P_b = 1$ entsprechen, so erhält man als Verschiebung v_a des Punktes a in der Richtung P_a, hervorgerufen durch die Last $P_b = 1$,

$$v_a = \sum \mathfrak{s}_a e_b.$$

Hierbei ist normale Temperatur und eine Arbeit der Auflagerdrücke $= 0$ vorausgesetzt. In gleicher Weise ergiebt sich die Verschiebung v_b des Punktes b in der Richtung P_b, hervorgerufen durch die Last $P_a = 1$, zu

$$v_b = \sum \mathfrak{s}_b e_a.$$

Die Gleichung $v_a = v_b$ ist im allgemeinen nur möglich, wenn $e_a : \mathfrak{s}_a = e_b : \mathfrak{s}_b$, d. h. wenn Stabkraft und Stabverlängerung einander proportional sind, oder wenn $\sigma = E\varepsilon$.

Die Summirung von Einzelwirkungen bei Bestimmung der Gröfsen X und der Stabkräfte S ist bei beliebigem Formänderungs-Gesetze nicht zulässig. Bezeichnet man mit X_1 denjenigen Werth einer Gröfse X, welcher durch alleinige Wirkung der Last P_1 hervorgerufen wird, mit X_2 X_{12} die entsprechenden Werthe für P_2 und $P_1 + P_2$, so gilt die Gleichung $X_{12} = X_1 + X_2$ im Allgemeinen nur für das Elasticitätsgesetz $\sigma = E\varepsilon$. Den Beweis liefert Gl. 6, wenn man $t = 0$ setzt und der Einfachheit wegen ein System mit einer einzigen Unbekannten X zu Grunde legt. Gl. 6 geht dann über in $0 = \sum \mathfrak{s} s f\left(\frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{s}X}{F}\right)$.

Bei Belastung durch P_1 wird $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$
" " " P_2 " $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_2$
" " " $P_1 + P_2$ wird $\mathfrak{S}_{12} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2$,

weil es sich hier um Kräfte eines statisch bestimmten Systems handelt, welche linearer Form sind und daher die Summirung der Wirkungen zulassen. Für die drei angenommenen Belastungsfälle erhält man

$$0 = \sum \mathfrak{s} s f\left(\frac{\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{s}X_1}{F}\right), \quad 0 = \sum \mathfrak{s} s f\left(\frac{\mathfrak{S}_2 + \mathfrak{s}X_2}{F}\right),$$
$$0 = \sum \mathfrak{s} s f\left(\frac{\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{s}X_{12}}{F}\right).$$

Die dritte Gleichung liefert im Allgemeinen nur dann einen Werth X_{12} gleich $X_1 + X_2$, wenn f eine lineare homogene Funktion darstellt, also $f\left(\frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{s}X}{F}\right) = \frac{1}{E}\frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{s}X}{F}$ bezw. $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$. Aufserdem kann noch in besonderen Fällen X_{12} gleich $X_1 + X_2$ werden, z. B. wenn f eine lineare unhomogene Funktion $f\left(\frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{s}X}{F}\right) = \frac{1}{D}\left(\frac{\mathfrak{S} + \mathfrak{s}X}{F} - \zeta\right)$ und gleichzeitig $\sum \frac{\mathfrak{s}\zeta s}{D} = 0$ wird. Es ist dies die unter I aufgestellte Bedingung für die Gültigkeit der gebräuchlichen Formeln auch aufserhalb der Elasticitätsgrenze.

Für Vollwand-Träger gilt gleichfalls der Satz von der kleinsten Ergänzungsarbeit. Denkt man sich den Träger aus unendlich vielen Parallelepipeden vom Inhalte i zusammengesetzt und bezeichnet mit $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ $\tau_x \tau_y \tau_z$ die Normal- und Tangentialspannungen der Seitenflächen, mit $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$ $\gamma_x \gamma_y \gamma_z$ deren Verschiebungen, so lassen sich die Spannungen σ und τ entsprechend den Gl. 2 als lineare Funktionen der statisch unbestimmbaren Gröfsen X ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 + \sigma' X' + \sigma'' X'' + \dots \\ \tau &= \tau_0 + \tau' X' + \tau'' X'' + \dots \end{aligned}\right\} \qquad (11$$

Durch Differenzirung folgt hieraus

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial X'} &= \sigma', \quad \frac{\partial \sigma}{\partial X''} = \sigma'' \dots \\ \frac{\partial \tau}{\partial X'} &= \tau', \quad \frac{\partial \tau}{\partial X''} = \tau'' \dots \end{aligned}\right\} \qquad (12$$

Mit Hülfe der Gleichung der virtuellen Verschiebungen erhält man in ähnlicher Weise wie unter I die m Bedingungsgleichungen in der Form

$$\left.\begin{aligned} 0 = \sum\left(\varepsilon_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \varepsilon_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial X} + \varepsilon_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial X} + \gamma_x \frac{\partial \tau_x}{\partial X} + \gamma_y \frac{\partial \tau_y}{\partial X} + \gamma_z \frac{\partial \tau_z}{\partial X}\right) i \\ + \sum c \frac{\partial C}{\partial X}. \end{aligned}\right\} \qquad (1$$

Die Ergänzungsarbeit des Trägers ist

$$B = \sum \int (\varepsilon_x d\sigma_x + \varepsilon_y d\sigma_y + \varepsilon_z d\sigma_z + \gamma_x d\tau_x + \gamma_y d\tau_y + \gamma_z d\tau_z)\, i.$$

B wird zum Minimum, wenn die Differentialquotienten $\frac{\partial B}{\partial X}$ gleich Null werden, also

$$\left.\begin{aligned} 0 = \frac{\partial B}{\partial X} = \\ \sum \left(\varepsilon_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial X} + \varepsilon_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial X} + \varepsilon_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial X} + \gamma_x \frac{\partial \tau_x}{\partial X} + \gamma_y \frac{\partial \tau_y}{\partial X} + \gamma_z \frac{\partial \tau_z}{\partial X}\right) i \end{aligned}\right\} (14$$

Gl. 14 stimmt mit Gl. 13 vollkommen überein, wenn $\sum c \frac{\partial C}{\partial X} = 0$, d. h. wenn die Auflagerdrücke keine Arbeit leisten. Für diesen Fall gilt also der Satz von der kleinsten Ergänzungsarbeit unmittelbar. Ist $\sum c \frac{\partial C}{\partial X}$ nicht gleich Null, so ist unter B auch noch die Ergänzungsarbeit der Auflagerdrücke $\left(= \sum \int c\, dC\right)$ mitzurechnen, damit $\frac{\partial B}{\partial X} = 0$ mit Gl. 13 identisch wird und auch hierfür der Satz von der kleinsten Ergänzungsarbeit Geltung besitzt. Treten keine Reibungsarbeiten auf, so ist B gleich der Ergänzungsarbeit der gesammten Konstruktion (Träger + Stützkörper).

Auch der Satz vom Differentialquotienten der Ergänzungsarbeit, $v = \frac{\partial B}{\partial P}$, ist für Vollwand-Träger ebenso wie für die Fachwerkträger gültig, d. h. die Verschiebung v des Angriffspunktes einer Last P im Sinne derselben ist gleich dem Differentialquotienten der Ergänzungsarbeit B nach P.

Da in Vorstehendem keinerlei Voraussetzungen bezüglich der Formänderungen ε und γ, abgesehen von entsprechender Kleinheit derselben, gemacht wurden, so gelten die betr. Sätze ganz allgemein für beliebige Formänderungs-Gesetze, für beliebige Temperaturänderungen, für isotrope und für nicht isotrope Körper.

Neue eiserne Thore für die Schleuse der transatlantischen Dampfer zu Hâvre;

bearbeitet nach den Annales des ponts et chaussées 1887, Okt., S. 411—463, vom Wasserbau-Ingenieur von Horn zu Hamburg.

(Mit Zeichnungen auf Bl. 33 — 36.)

Die Bauart der meisten eisernen Schleusenthore ist derjenigen der hölzernen Thore nachgebildet und besteht demnach aus einer Anzahl wagerechter Riegel nebst Schlag- und Drehsäule. Solange die Thore mehr Höhe als Breite haben, kann diese Bauart auch als gut bezeichnet werden; übertrifft indessen die Breite die Höhe, so ist es zweckmäßiger, die Thore aus einem Rahmwerke zu bilden, welches aus einem unteren und oberen Rahm, einer Dreh- und Schlagsäule und aus senkrechten Mittelstielen besteht, demnach die wagerechten Zwischenriegel fortfallen lässt. Eine derartige Bauart ist mit gutem Erfolge bei den neuen eisernen Schleusenthoren für die transatlantischen Dampfer in Hâvre zur Anwendung gelangt, und es dürfte angesichts der fortwährend noch wachsenden lichten Weite der Seeschleusen angezeigt sein, darüber einige Mittheilungen zu machen.

Die Schleuse der „Transatlantischen", welche den Vorhafen mit dem Bassin de l'Eure verbindet, hat 30,5 m lichte Weite. Die aus behauenen Granitquadern hergestellte Schlagschwelle hat 5,51 m Pfeil und liegt 2,95 m unter Null (Bl. 33). Bis vor einiger Zeit bildeten 2 Paar hölzerne, in den Jahren 1861—1862 gebaute Ebbethore den Abschluss des Beckens, welche bei 17,5 m Länge eine Höhe von 9,80 m hatten, mit Ausschluss der hinüber führenden Fußbrücken. Die Dreh- und Schlagsäulen aus Eichenholz hielten jede 0,88 m im Quadrat und waren aus verschiedenen Stücken zusammengesetzt, die Querriegel aus Kieferholz waren ebenfalls aus mehreren Stücken gebildet; ihre Breite betrug 0,88 m an den Enden und 2,08 m in der Mitte. Die Gesammtmasse an Holzwerk betrug für einen Thorflügel 500 cbm; das Gewicht des Eisens und der sonstigen Metalle erreichte 135 t, und die Kosten eines Paares Thore stellten sich auf 332 000 ℳ, einschl. des Einhängens.

Seit einigen Jahren zeigten die beiden Thorpaare und hauptsächlich das untere, dem Wellenschlage des Vorhafens ausgesetzte, beunruhigende Anzeichen des Verfalles. Die Schlagsäule des südlichen Thorflügels war beinahe 6 cm aus einander geborsten; die Drehsäule klang unter dem Hammer an manchen Stellen hohl; der obere Rahm zeigte, hauptsächlich an der unteren Seite, eine Wölbung von 14 cm Pfeilhöhe. Alle vier Thorflügel hatten bedeutende Leckstellen.

Gründe zur Einführung eiserner Thore. Man beschloss, bei der Erneuerung der Thore Holz gänzlich auszuschließen, weil einerseits Eichenholz in den erforderlichen Stärken in Frankreich nicht mehr erhältlich ist und demnach amerikanisches Holz hätte verwendet werden müssen, andererseits oft die Fehler im Holze erst dann zu Tage treten, wenn die Bearbeitung vorgenommen wird. Ganz abgesehen davon, dass Eisen in dieser Beziehung keine Schwierigkeiten verursacht, ergab die Kostenberechnung eine bedeutende Ersparung zu Gunsten der eisernen Thore, welche für solche von großen Abmessungen bis zu 30 % beträgt. Diese Vortheile, wie ferner noch die Hoffnung auf eine größere Dauer und die seit ungefähr 15 Jahren in anderen Häfen mit eisernen Thoren erzielten günstigen Erfolge (vgl. 1886, S. 425) gaben den Ausschlag zur Verwendung des Eisens. Da außerdem das Aus- und Einhängen der Thore sich wesentlich erleichtert, so kann man ohne große Mühe alle 2 oder 3 Jahre ein Paar aushängen, aufs Trockne bringen, daselbst reinigen, mit neuem Anstriche versehen und ausbessern.

Ein einziges Bedenken gegen die Anwendung des Eisens ergab der Umstand, dass die unteren Zapfenlager aus Bronze bestanden. In Rücksicht auf die Lage derselben, 4 m unter dem niedrigsten Stande des Meeres und in den Wendenischen, konnte man nicht daran denken, dieselben durch solche aus Stahl zu ersetzen. Bekanntlich soll man aber vermeiden, zwei Metalle verschiedener Natur unter Seewasser neben einander zu stellen, und zwar wegen der galvanischen Ströme, welche