ZEITSCHRIFT

des

Architekten- und Ingenieur-Vereins

zu

HANNOVER.

Neue Folge des Notizblattes.

Herausgegeben von dem Vorstande des Vereins.

Redigirt von

Keck,
Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

Band XXVIII.

Heft 1—4.

Mit 48 Blatt Zeichnungen und vielen in den Text eingedruckten Holzschnitten.

ZUM LICHT

HANNOVER.
SCHMORL & VON SEEFELD.
1882.

Dübbel wurden die Schienenstühle gesetzt, und in diesen die Krahnschiene befestigt. Die hintere Fläche der Mauer wurde von + 6,75 m an abwärts verputzt.

Die Konstruktion der alten Vorsetze bedingte bei Schuppen Nr. 0 ein Herausschieben der äufseren Mauerflucht um 93 cm. Es wurde deshalb der Anschluss der Mauer an die bereits bei Schuppen Nr. 0 vorhandene Mauer durch einen kurzen Bogen bewirkt und der ganze Bogen der Mauer aus starken Granitquadern hergestellt.

Der für die Mauer zur Verwendung gekommene Cementmörtel bestand aus 1 Raumtheil Cement auf 3 Raumtheile Sand. Bezogen ist der Cement aus der Lüneburger Cement-Fabrik der Herren Gebr. Heyn und zur vollsten Zufriedenheit ausgefallen.

Die Hinterfüllung der Mauer geschah wie folgt: Zuerst wurde an der Mauersohle eine 1 m hohe und 1,2 m breite Lage Steinschutt aufgeschichtet und darauf der Rest mit Baggersand aufgefüllt, den man gehörig stampfte und festschlämmte. Nach Legung der Wasserleitung, der Regenrohr-Leitung, Setzen der Wasserpfosten, Legen der Schienen für das Krahn- und Bahngleis wurde der Raum von der Mauer bis zu den Schuppen gepflastert.

Der Thorweg zwischen Schuppen Nr. 4 und 5 wurde überbrückt, und dadurch aus zwei Schuppen ein gröfserer, für den Betrieb erwünschter Schuppen hergestellt.

Die Schuppen wurden ausgebessert, besonders Fufsböden und Fahrbahn in denselben, und damit konnte der Bau als beendet angesehen werden. Am 15. Jan. 1881 wurde die letzte Strecke der neuen Mauer vor Schuppen 1 dem Betriebe übergeben.

Der Bau war in Submission vergeben. Die obere Bauleitung hatte der Wasserbauinspektor Hr. Buchheister, die specielle Leitung während der letzten beiden Baujahre der Verfasser.

Das Princip der kleinsten Arbeit der inneren Kräfte elastischer Systeme und seine Anwendung auf die Lösung baustatischer Aufgaben;

vom Baurath Dr. Fränkel, Professor am Polytechnikum zu Dresden.

Einleitung.

Bei der statischen Untersuchung von Konstruktionen, deren äufsere Kräfte nur unter Berücksichtigung der elastischen Deformationen sämmtlicher Theile bestimmt werden können (z. B. bei Gewölben), hilft man sich bekanntlich, mit Umgehung der Elasticitäts-Theorie, durch mehr oder weniger hypothetische Principe, die jedoch das Gemeinschaftliche haben, dass durch dieselben ein gewisses Kraftminimum bedingt wird. Nach dem Principe des kleinsten Widerstandes wird für eine äufsere Kraft (bei Bögen den Horizontalschub), nach dem Principe der günstigsten Beanspruchung dagegen für eine innere Kraft (bei Bögen die gröfste Kantenpressung) der kleinste aller statisch möglichen Werthe angenommen.

Aber auch bei der genaueren Behandlungsweise der tragenden Systeme mit Hülfe der Elasticitäts-Theorie kommt ein Minimum — das Minimum der Deformationsarbeit — zur Geltung. Da dem Verf. nicht bekannt ist, dass dieses, in der Ueberschrift genannte Princip bereits allgemein ausgesprochen wäre, andererseits aber durch dasselbe eine ganze Reihe von baustatischen Problemen eine einheitliche Auffassung zulassen, so möge im Folgenden eine kurze Darlegung desselben gestattet sein.

Beweis des Principes.

Es möge zunächst, der Einfachheit halber, ein System von m in einer Ebene liegenden Punkten zu Grunde gelegt werden, welche durch n elastische Stäbe miteinander verbunden sind. Die Längen der Stäbe heifsen

$$l_1 \quad l_2 \quad l_3 \, \ldots\ldots \, l_n,$$

die Querschnitte derselben

$$F_1 \quad F_2 \quad F_3 \, \ldots\ldots \, F_n,$$

und die entsprechenden Elasticitätsmoduli

$$E_1 \quad E_2 \quad E_3 \, \ldots\ldots \, E_n.$$

Auf die m Punkte wirken die äufseren Kräfte

$$P_1 \quad P_2 \quad P_3 \, \ldots\ldots \, P_m,$$

wodurch in den Stäben die inneren Kräfte

$$S_1 \quad S_2 \quad S_3 \, \ldots\ldots \, S_n$$

hervorgerufen werden. Bei der elastischen Deformation des Systems ist die Arbeit dieser inneren Kräfte gleich der negativen Arbeit der äufseren Kräfte P.

Die inneren Kräfte sind zunächst nicht bekannt. Es leuchtet jedoch ein, dass wenn das elastische System unter der Einwirkung der wirklich stattfindenden inneren Kräfte $S_1 \; S_2 \; S_3 \, \ldots\ldots \, S_n$ sich im Gleichgewichte befindet, dieses Gleichgewicht auch noch stattfinden wird, wenn man die inneren Kräfte in

$$(S_1 + \delta S_1) \; (S_2 + \delta S_2) \; (S_3 + \delta S_2) \ldots\ldots (S_n + \delta S_n$$

übergeben lässt, dabei aber die Variationen so wählt, dass die Kräfte

$$\delta S_1 \quad \delta S_2 \quad \delta S_3 \;\ldots\ldots\ldots\; \delta S_n$$

1) stets für sich im Gleichgewichte bleiben, und

2) bei der wirklichen Deformation des elastischen Körpers keine Arbeit verrichten (da ja schon die Arbeit der wirklich auftretenden Kräfte

$$S_1 \quad S_2 \quad S_3 \;\ldots\ldots\; S_n$$

gleich der negativen Arbeit der äufseren Kräfte ist).

Die zweite der eben erwähnten Bedingungen drückt sich durch folgende Gleichung aus:

$$(1) \ldots\ldots \frac{S_1 l_1}{E_1 F_1} \cdot \delta S_1 + \frac{S_2 l_2}{E_2 F_2} \cdot \delta S_2 + \frac{S_3 l_3}{E_3 F_3} \cdot \delta S_3 + \ldots\ldots\ldots + \frac{S_n l_n}{E_n F_n} \cdot \delta S_n = 0,$$

da bei der wirklich stattfindenden elastischen Deformation die Stablängen l_1, l_2 u. s. w. sich um $\frac{S_1 l_1}{E_1 F_1}$, $\frac{S_2 l_2}{E_2 F_2}$ u. s. w. ändern.

Die erste der obigen Bedingungen hat die Bedeutung, dass nicht alle Variationen δS, sondern nur $n - 2m + 3$ derselben willkürlich gewählt werden können, weil bekanntlich zur Bestimmung der im Gleichgewichte stehenden n Stabkräfte

$$\delta S_1 \quad \delta S_2 \quad \delta S_3 \;\ldots\ldots\ldots\; \delta S_n$$

die Statik $2m - 3$ Bedingungsgleichungen liefert.

Die Gleichung (1) lässt sich demnach in $n - 2m + 3$ Gleichungen zerspalten, indem man z. B. nacheinander je eines der $n - 2m + 3$ willkürlichen δS beliebig wählt und die übrigen $n - 2m + 2$ willkürlichen δS gleich Null setzt, also indem man nacheinander in Gleichung (1) einführt:

$$\begin{array}{llll}
\delta S_1 = \delta S_1; & \delta S_2 = 0; & \delta S_3 = 0; & \ldots\; \delta S_{n-2m+3} = 0 \\
\delta S_1 = 0; & \delta S_2 = \delta S_2; & \delta S_3 = 0; & \ldots\; \delta S_{n-2m+3} = 0 \\
\delta S_1 = 0; & \delta S_2 = 0; & \delta S_3 = \delta S_3; & \ldots\; \delta S_{n-2m+3} = 0 \\
- - - & - - - & - - - & - - - - \\
\delta S_1 = 0; & \delta S_2 = 0; & \delta S_3 = 0; & \delta S_{n-2m+3} = \delta S_{n-2m+3}.
\end{array}$$

Hierdurch erhält man aus Gleichung (1), wenn man zur gröfseren Deutlichkeit die δ mit einem Index versieht, der angiebt, welche von den $n - 2m + 3$ willkürlichen Variationen nicht gleich Null gesetzt worden ist, und unter Einführung der Abkürzung $n - 2m = k$:

$$(2)\left\{\begin{array}{l}
\frac{S_1 l_1}{E_1 F_1} \cdot \delta_1 S_1 + \frac{S_{k+4} l_{k+4}}{E_{k+4} F_{k+4}} \cdot \delta_1 S_{k+4} \\
+ \frac{S_{k+5} l_{k+5}}{E_{k+5} F_{k+5}} \cdot \delta_1 S_{k+5} + \ldots\ldots + \frac{S_n l_n}{E_n F_n} \delta_1 S_n = 0 \\
\frac{S_2 l_2}{E_2 F_2} \cdot \delta_2 S_2 + \frac{S_{k+4} l_{k+4}}{E_{k+4} F_{k+4}} \cdot \delta_2 S_{k+4} \\
+ \frac{S_{k+5} l_{k+5}}{E_{k+5} F_{k+5}} \cdot \delta_2 S_{k+5} + \ldots\ldots + \frac{S_n l_n}{E_n E_n} \cdot \delta_2 S_n = 0 \\
- - - - - - - - - - - - \\
\frac{S_{k+3} l_{k+3}}{E_{k+3} F_{k+3}} \cdot \delta_{k+3} S_{k+3} + \frac{S_{k+4} l_{k+4}}{E_{k+4} F_{k+4}} \cdot \delta_{k+3} S_{k+4} \\
+ \frac{S_{k+5} l_{k+5}}{E_{k+5} F_{k+5}} \cdot \delta_{k+3} S_{k+5} + \ldots + \frac{S_n l_n}{E_n F_n} \cdot \delta_{k+3} S_n = 0.
\end{array}\right.$$

Dieses Gleichungssystem ist aber genau dasjenige, zu welchem man auch gelangt, wenn man nach den Bedingungen sucht, denen die n inneren Kräfte

$$S_1 \quad S_2 \quad S_3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; S_n$$

genügen müssen, damit die bei der Deformation des elastischen Systems von denselben geleistete Arbeit

$$(3) \quad A = \frac{1}{2}\left\{\frac{S_1^2 l_1}{E_1 F_1} + \frac{S_2^2 l_2}{E_2 F_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{S_n^2 l_n}{E_n F_n}\right\}$$

ein Minimum werde, wobei die n Kräfte durch $2m - 3$ statische Gleichgewichts-Bedingungen aneinander gebunden sind, so dass $n - 2m + 3$ innere Kräfte willkürlich bleiben.

Bildet man die für das Minimum geltenden Bedingungen

$$(4) \quad \frac{dA}{dS_1} = 0; \quad \frac{dA}{dS_2} = 0; \quad \ldots\ldots \quad \frac{dA}{dS_{n-2m+3}} = 0,$$

und berücksichtigt, dass, wegen der Unabhängigkeit der $n - 2m + 3$ willkürlichen Variabelen,

$$\begin{array}{llll}
\frac{dS_1}{dS_1} = 1; & \frac{dS_2}{dS_1} = 0; & \frac{dS_3}{dS_1} = 0; \ldots & \frac{dS_{n-2m+3}}{dS_1} = 0 \\
\frac{dS_1}{dS_2} = 0; & \frac{dS_2}{dS_2} = 1; & \frac{dS_3}{dS_2} = 0; \ldots & \frac{dS_{n-2m+3}}{dS_2} = 0 \\
- - - & - - - & - - - & - - - - \\
\frac{dS_1}{dS_{n-2m+3}} = 0; & \frac{dS_2}{dS_{n-2m+3}} = 0; & \frac{dS_3}{dS_{n-2m+3}} = 0; & \\
& & \frac{dS_{n-2m+3}}{dS_{n-2m+3}} = 1 &
\end{array}$$

ist, so unterscheidet sich das Gleichungssystem (4) von dem Gleichungssysteme (2) nur dadurch, dass im ersteren d an Stelle von δ steht, eine Vertauschung, die keinen Unterschied ausmacht.

Es ist leicht einzusehen, dass für den Fall, wenn das gegebene elastische System kein ebenes, sondern ein räumliches ist, man den Beweis unseres Princips in ganz ähnlicher Weise wie oben führen kann. Bei m Punkten und n Verbindungsstäben werden jedoch nunmehr aufser den $3m - 6$ durch die Statik gelieferten Bedingungs-Gleichungen noch $n - 3m + 6$ Bedingungs-Gleichungen zur vollständigen Bestimmung der n inneren Kräfte $S_1 \; S_2 \; S_3 \ldots\ldots S_n$ erforderlich sein. Diese Gleichungen werden aus den Bedingungen für das Minimum der Deformationsarbeit A gewonnen, indem man, unter Berücksichtigung der gegenseitigen Unabhängigkeit von $S_1 \; S_2 \; S_3 \ldots\ldots S_{n-3m+6}$, die Beziehungen

$$\frac{dA}{dS_1} = 0; \quad \frac{dA}{dS_2} = 0; \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dA}{dS_{n-3m+6}} = 0;$$

anschreibt.

Endlich ist es auch gestattet, das für ein elastisches Stabsystem bewiesene Princip ohne Weiteres auch auf einen homogenen, isotropen elastischen Körper anzuwenden, da ein solcher ersetzt werden kann durch ein System einander unendlich naher Punkte, welche nach drei zu einander normalen Richtungen aequidistant im Raum vertheilt und derart durch sieben Scharen gleichartiger prismatischer Streben verbunden sind, dass drei Scharen von Streben mit jenen Richtungen zusammenfallen, während die anderen vier

5

die ersteren vollständig symmetrisch kreuzen, wobei die Querschnitte der diesen Gruppen angehörenden Streben sich wie $1 : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ verhalten. (Vergl. Kirsch, die Fundamentalgesetze der Theorie der Elasticität fester Körper, hergeleitet aus der Betrachtung eines Systems von Punkten, welche durch elastische Streben verbunden sind. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1868, Heft 8—10.)

Man kann aber unser Princip auch direkt für homogene elastische Körper, wie folgt, beweisen.

Durch die äufseren Kräfte werden an jedem Körperelemente $d\,V = dx \cdot dy \cdot dz$ die 6 Normal- und Tangentialspannungen

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z$$

hervorgerufen, welche inneren Kräfte mit den gegebenen äufseren, am Körper angreifenden Kräften im Gleichgewichte stehen.

Diese inneren Kräfte sind zunächst nicht bekannt. Es leuchtet jedoch ein, dass der elastische Körper sich auch noch im Gleichgewichte befinden würde, wenn statt der obigen 6 Spannungen an jedem Körperelemente die folgenden 6 Spannungen

$$(\sigma_x + \delta\sigma_x) \quad (\sigma_y + \delta\sigma_y) \quad (\sigma_z + \delta\sigma_z)$$
$$(\tau_x + \delta\tau_x) \quad (\tau_y + \delta\tau_y) \quad (\tau_z + \delta\tau_z)$$

wirkten, wenn nur die durch die Variationen

$$\delta\sigma_x \quad \delta\sigma_y \quad \delta\sigma_z \quad \delta\tau_x \quad \delta\tau_y \quad \delta\tau_z$$

dargestellten Kräfte so gewählt werden, dass dieselben 1) für sich im Gleichgewichte stehen und 2) bei der wirklich eintretenden elastischen Deformation des Körpers keine Arbeit leisten.

Die erste Bedingung spricht aus, dass die 6 Variationen nicht völlig willkürlich sind, sondern durch die statischen Gleichgewichtsbedingungen der Körperelemente an einander gebunden sind.

Die zweite Bedingung kann geschrieben werden, wenn man mit

$$\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_x \quad \gamma_y \quad \gamma_z$$

die wirklichen, in Folge der Spannungen

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z$$

eintretenden Ausdehnungen und Verschiebungen des Körperelementes $d\,V$ nach Richtung der 3 Achsen bezeichnet,

$$\int(\varepsilon_x \cdot \delta\sigma_x + \varepsilon_y \cdot \delta\sigma_y + \varepsilon_z \cdot \delta\sigma_z + \gamma_x \cdot \delta\tau_x + \gamma_y \cdot \delta\tau_y + \gamma_z \cdot \delta\tau_z)\, d\,V = 0. \tag{5}$$

Für einen isotropen Körper gelten aber die Beziehungen:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m}\right);$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right); \quad \gamma_x = \frac{1}{G}\tau_x; \quad \gamma_y = \frac{1}{G}\tau_y;$$
$$\gamma_z = \frac{1}{G}\tau_z,$$

wobei E den Elasticitätsmodul für Normal-Elasticität, G denjenigen für Schubelasticität bedeutet und $\frac{1}{2}\frac{m}{m+1} \cdot E = G$ ist.

Setzt man diese Ausdrücke in Gleichung (5) ein, so schreibt sich dieselbe:

$$\frac{1}{E}\int\Big\{\sigma_x \cdot \delta\sigma_x + \sigma_y \cdot \delta\sigma_y + \sigma_z \cdot \delta\sigma_z - \frac{1}{m}\Big[(\sigma_y + \sigma_z)\,\delta\sigma_x + (\sigma_z + \sigma_x)\,\delta\sigma_y + (\sigma_x + \sigma_y)\,\delta\sigma_z\Big]\Big\}\,d\,V + \frac{1}{G}\int(\tau_x \cdot \delta\tau_x + \tau_y \cdot \delta\tau_y + \tau_z \cdot \delta\tau_z)\,d\,V = 0. \tag{6}$$

Andererseits ist die innere Deformations-Arbeit des isotropen Körpers, ausgedrückt durch die Spannungen im Zustande der gröfsten Deformation,

$$A = \frac{1}{2E}\int\left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m}[\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y]\right)d\,V + \frac{1}{2G}\int(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)\,d\,V. \tag{7}$$

Soll dieser Ausdruck ein Minimum werden, so muss das vollständige Differential desselben gleich Null gesetzt werden. Dies führt aber wieder zur Gleichung (6), wenn man in derselben nur d statt δ schreibt.

Auf ähnlichem Wege kann man die Richtigkeit des Princips der kleinsten Deformationsarbeit auch für nicht isotrope Körper beweisen, sobald man, wie dies (wegen der Kleinheit der elastischen Formänderungen) gewöhnlich geschieht, zwischen den Spannungsgröfsen σ_x σ_y σ_z τ_x τ_y τ_z einerseits und den Deformationsgröfsen ε_x ε_y ε_z γ_x γ_y γ_z andererseits nur lineare Beziehungen voraussetzt.

(Nachtrag: Nach Drucklegung dieses Aufsatzes ist der Verf. durch Prof. Dr. Winkler darauf aufmerksam gemacht worden, dass der Satz über die kleinste Deformations-Arbeit elastischer Systeme sich bereits in dem Werke von Castigliano: „Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques; Paris 1880" befindet.)

Anwendung auf elastische Bogenträger.

Es mögen Bogenträger mit eingespannten Enden vorausgesetzt werden. Bezeichnet man das Biegungsmoment für irgend einen Querschnitt mit M, die zum Querschnitte normal, beziehungsweise parallel wirkende Komponente der resultirenden äufseren Kraft am betrachteten Segmente mit N und T, und setzt ferner voraus, dass die Querschnittshöhe des Trägers klein im Verhältnisse zum Krümmungshalbmesser der Bogenachse sei, so berechnet sich die an einem Querschnittselemente dF im Abstande y von der Querschnitts-Schwerachse wirkende Normalspannung zu

$$\left(\frac{N}{F} \pm \frac{My}{J}\right)dF,$$

wobei J das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf seine Schwerachse bedeutet. (Fig. 1.)

Fig. 1.